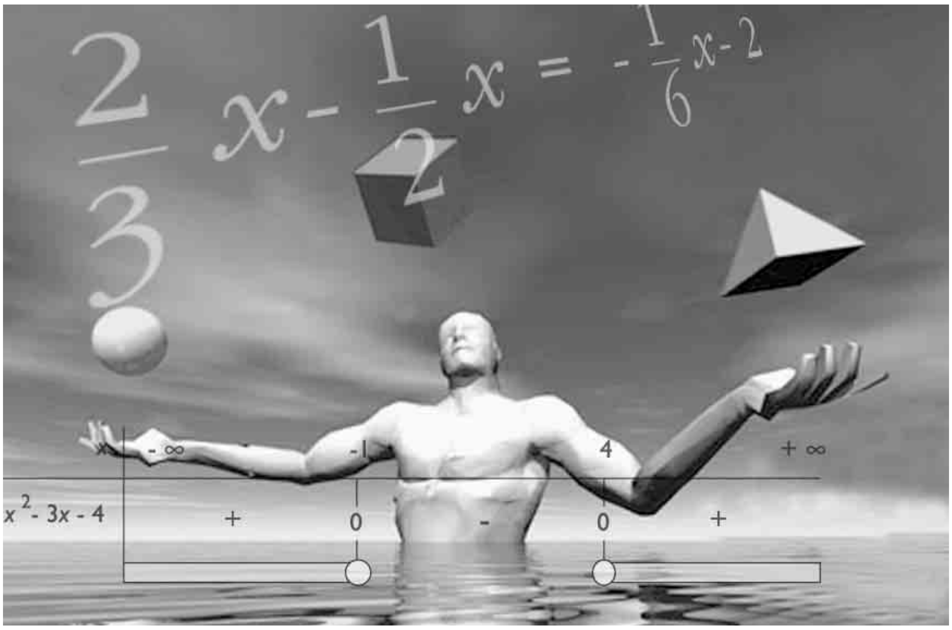
2

Özdeşlikler Denklemler ve Eşitsizlikler



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *denklem çözümlerinde kullanılan temel özdeşlikleri öğrenebilecek,*
- *birinci, ikinci ve üçüncü derece denklemleri çözümleyebilecek,*
- *birinci ve ikinci derece eşitsizliklerin çözümlerini bulabilecek,*
- *köklü ve mutlak değerli denklemler ile bazı mutlak değerli eşitsizliklerin çözümlerini yapabileceksiniz.*

İçindekiler

DİKKAT

- ***Tanımlar iyi anlaşılmalı, özdeşlikler öğrenilmeli,***
- ***alıştırmalar çözülmelidir.***

Giriş

A ve B gibi iki oto kiralama firmasından, A firması bir arabayı günlük 3.200.000 TL ve kilometre başı 40.000 TL' ye, B firması ise aynı marka bir arabayı günlük 4.000.000 TL ve kilometre başı 32.000 TL ye kiraya vermektedir. A firmasından bir haftalığına bir araba kiralayan bir kişinin bu firmaya ödeyeceği paranın B firmasına ödemesi gereken paradan az olması için bu kişinin arabayı en fazla kaç kilometre kullanması gerekir?

Günlük yaşantımızdaki problemlerin pek çoğu bir ya da birkaç bilinmeyenli denklemler ya da eşitsizliklerle ifade edilebilir. Örneğin, yukarıdaki soru bir eşitsizlik yardımıyla çözülecektir (bkz. 14. Örnek). İki kesimden oluşacak bu ünitenin ilk kesiminde ön bilgiler, özdeşlikler, birinci, ikinci ve yüksek dereceli denklemlerin çözümleri üzerinde duracağız. İkinci kesim eşitsizlik çözümleri ile ilgili olacaktır.

DEĞİŞKEN, SABİT, PARAMETRE, ÖZDEŞLİKLER VE DENKLEMLER

AMAÇ 1 ***Denklem çözümlerinde kullanılan temel özdeşlikleri öğreneceksiniz.***

Değişebilen, yani farklı değerler alabilen bir büyüklüğe **değişken,** her zaman aynı kalan bir büyüklüğe **sabit** ve bazen değişken bazen de sabit olarak işlem gören bir büyüklüğe de **parametre** denir.

Örneğin; ekonomide fiyat, kazanç, gelir, maliyet gibi kavramlar değişkendir. x bir değişken olmak üzere $3x - 5$ yazılışında 3, -5 sabitlerdir. $ax - 5$ ifadesinde a nın 3 değeri olabildiği gibi başka değerlerde olabileceği düşünülürse a bir parametredir.

Değişken, parametre, sabit ve bunların farkları, toplamları, çarpımları, bölümleri, kökleri vs. içeren ancak eşitlik, eşitsizlik içermeyen $x + a$, $2x - 3$, $\sqrt{x - a} + 7$, ... gibi ifadelere **cebirsel ifade** denir.

Bir cebirsel ifadede $=, \leq, <, \geq$ ve $>$ simgeleri bulunmaz.

Değişkenlerin aldığı **her** değer için birbirlerine eşit olan iki cebirsel ifadeye özdeştir denir. Böyle bir eşitliğe de **özdeşlik** adı verilir.

Özdeş iki cebirsel ifadeden biri, diğeri yerine alınabilir.

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

eşitliği doğru olduğundan $(x + y)^2$ cebirsel ifadesi ile $x^2 + 2xy + y^2$ cebirsel ifadesi birbirlerine özdeştir.

Bazı önemli özdeşlikler aşağıda verilmiştir.

a) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ (iki kare farkı)

b) $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = (x + y)(x + y)$ (tam kare)

c) $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = (x - y)(x - y)$ (tam kare)

d) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ (iki küp farkı)

e) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (iki küp toplamı)

AMAÇ 2 ***Birinci, ikinci ve üçüncü derece denklemleri çözümleyebileceksiniz.***

Değişken bulunduran ve değişkenin **bazı** değerleri için doğru olan eşitliklere **denklem** denir. Bir denklemde, değişkenin eşitliği doğrulayan değerlerine de **denklemin kökleri** adı verilir.

Verilen bir denklemin çözümlerinin varlığı ve bulunabilmesi matematikte önemli bir konudur. Bilindiği gibi her tür denklemin çözümünde izlenecek genel bir yol olmadığından, denklemler çeşitli biçimlerde sınıflandırılarak çözüm yolları aranır. Bu sınıflandırmalardan ikisi denklemlerin **bilinmeyen sayısına** ve **bilinmeyenlerin en yüksek derecesine** göre sınıflamadır.

Tek bilinmeyen içeren denklemlere **bir bilinmeyenli denklemler,** iki bilinmeyen içeren denklemlere **iki bilinmeyenli denklemler,** benzer şekilde n-bilinmeyen içeren denklemlere de ***n*-bilinmeyenli denklemler** denir.

Örneğin ; $x + 3 = 7$ bir bilinmeyenli, $2xy + y = 1$ iki bilinmeyenli ve $x + 2y + z = 20$ ise üç bilinmeyenli denklemlerdir.

Tek bilinmeyen içeren ve bilinmeyenin derecesi bir olan denkleme, **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** (veya kısaca **birinci derece denklem**), tek bilinmeyen içeren ve bilinmeyenin derecesi iki olan bir denkleme ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem (veya kısaca ikinci derece denklem), benzer şekilde bir bilinmeyen içeren ve bilinmeyenin derecesi ***n* - olan bir denkleme**

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b = 0$ biçimindeki bir denkleme birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Böyle bir denklemin tek çözümü $x = -b/a$ dır. Denklemin çözüm kümesi

$Ç = \{-b/a\}$ dır.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ tipindeki bir denkleme ikinci derece denklem denir. Böyle bir denklemin

$\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere

- $\Delta < 0$ ise gerçel çözümü yoktur.
- $\Delta = 0$ ise $x = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta > 0$ ise $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

ve $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

gibi iki farklı çözümü vardır. Kısaca çözüm kümesi

$$Ç = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

dır.

***n.* dereceden bir bilinmeyenli bir denklem** (veya kısaca ***n.* derece denklem**) denir.

Bu kesimde 1. , 2. ve 3. derece denklemlerin çözüm yöntemlerine kısaca değineceğiz.

ÖRNEK 1

$3x + 12 + x - 8 = 10 + 2x + 4$ ***denklemini çözünüz.***

ÇÖZÜM

$$3x + x + 12 - 8 = 2x + 10 + 4$$
$$4x + 4 = 2x + 14$$
$$4x - 2x = 14 - 4$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

Böylece $Ç = \{5\}$ dir.

ÖRNEK 2

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{6}x - 2$ ***denklemini çözünüz.***

ÇÖZÜM

x lerin katsayılarının en küçük ortak katı 6 olduğundan denklemin her iki yanı 6 ile çarpılırsa

$$6 \cdot \frac{2}{3}x - 6 \cdot \frac{1}{2}x = 6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)x - 6 \cdot 2$$
$$4x - 3x = -x - 12$$
$$x + x = -12$$
$$2x = -12$$
$$x = -6$$

olur. Böylece $Ç = \{-6\}$ dır.

ÖRNEK 3

$4x^2 - 8x - 5 = 0$ ***denklemini çözünüz.***

ÇÖZÜM

$ax^2 + bx + c = 4x^2 - 8x - 5 = 0$ ve $a = 4$, $b = -8$ ve $c = -5$ olduğundan

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (-5)}}{2 \cdot (4)}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{8} = \frac{8 \pm 12}{8}$$
$$= \frac{2 \pm 3}{2}$$ olur ve çözümler

$x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ yani $Ç = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ olur.

ÖRNEK 4

$\frac{1}{10}x^2 = \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}$ ***denklemini çözünüz.***

ÇÖZÜM

$10 \cdot \left(\frac{1}{10}x^2\right) = 10 \cdot \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 4x - 5$

$x^2 - 4x + 5 = 0$

$a = 1$, $b = -4$ ve $c = 5$ olmak üzere

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (5) = 16 - 20 = -4 < 0$

olduğundan gerçel çözüm yoktur. $Ç = \varnothing$ dir.

ÖRNEK 5

$x^2 - 10x + 25 = 0$ ***denklemini çözünüz.***

ÇÖZÜM

$a = 1$, $b = -10$ ve $c = 25$ dir.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (25)}}{2 \cdot (1)} = \frac{10}{2} = 5$$

$x_1 = x_2 = 5$ olur. $Ç = \{5\}$ dir.

ÖRNEK 6

a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ***b)*** $x^2 + 5x + 6 = 0$ ***denklemlerini çözünüz.***

ÇÖZÜM

a) $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3) = 0$ dır.

$$\begin{array}{cc} 2x & -1 \\ x & -3 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-6x - x = -7x} \end{array}$$

Bir çarpımın sıfır olması için çarpanlarından en az biri sıfır olmalıdır.

$2x - 1 = 0$, $x - 3 = 0$ dır.

Buradan $x_1 = 1/2$, $x_2 = 3$ olur. $Ç = \{1/2, 3\}$ olur.

b) $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3) = 0$ dır.

$$\underset{2+3}{\downarrow} \quad \underset{2.3}{\downarrow}$$

Böylece $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$ olacağından $x_1 = -2$, $x_2 = -3$ çözüm olur.
$Ç = \{-3, -2\}$ dir.

İkinci derece denklemleri çarpanlarına ayırarak çözmede yararlı olacak iki ifadeyi verelim.

$a \neq 1$ olmak üzere $ax^2 + bx + c$ ikinci derece ifadeleri $a = p \cdot q$ ve $c = m \cdot n$ olmak üzere $b = p \cdot n + q \cdot m$ oluyorsa

$ax^2 + bx + c = (px + m)(qx + n)$

$$\begin{array}{cc} px & m \\ qx & n \\ \hline \multicolumn{2}{c}{bx = (pn + qm)x} \end{array}$$

olarak yazılır.

Özel olarak $a = 1$, $c = p \cdot q$ ve $b = p + q$ ise

$x^2 + bx + c$
$= x^2 + (p + q)x + p \cdot q$
$= (x + p)(x + q)$

biçiminde yazılır.

ÖRNEK 7

a) $3x^2 - x = 0$ ***b)*** $x^2 - 9 = 0$ ***denklemlerini çözünüz.***

ÇÖZÜM

a) $3x^2 - x = x(3x - 1) = 0$ olduğundan

$x_1 = 0$, $3x - 1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$ olur.

$Ç = \{0,\ 1/3\}$ tür.

b) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -\sqrt{9}$ veya $x = \sqrt{9}$ olduğundan

$x_1 = -3$ veya $x = 3$ olur.

$Ç = \{-3,\ 3\}$ tür.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde

- *$c = 0$ ise $ax^2 + bx = 0$*

  $\Rightarrow x(ax+b) = 0$

  $\Rightarrow x = 0$, $x = -\frac{b}{a}$

- *$b = 0$ ise $ax^2 + c = 0$,*

$\Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$, $-\frac{c}{a} \geq 0$ olmak koşuluyla

$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$

olur.

ÖRNEK 8

a) $x^3 + x^2 = 20x$ ***b)*** $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ ***denklemlerini çözünüz.***

ÇÖZÜM

a) $x^3 + x^2 - 20x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 20) = 0$

$\Rightarrow x(x + 5)(x - 4) = 0$

$\Rightarrow x = 0$, $x + 5 = 0$, $x - 4 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = -5$, $x_3 = 4$

$\Rightarrow Ç = \{-5,\ 0,\ 4\}$

b) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x^2(x + 3) - (x + 3) = 0$

$\Rightarrow (x + 3)(x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow (x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$

$\Rightarrow Ç = \{-3,\ -1,\ 1\}$

ÖRNEK 9

Bir şirket, birim başına maliyeti (işçilik ve araç gereç) 100 milyon TL olan fırın üretmektedir. Şirketin değişmez giderleri bir aylık 10 milyar TL dir. Ürünün satış fiyatı 130 milyon TL ise şirketin aylık kârının 11 milyar TL olması için satması gereken ürün sayısını belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Satılması gereken ürün sayısını x ile gösterelim.

Bu ürünlerin maliyeti $100x$ milyon TL dir.
İşletmenin toplam maliyeti $100x + 10.000$ milyon TL dir.
Şirketin toplam geliri ise $130x$ milyon TL dir.

Kâr	=	Toplam gelir - Toplam gider
11.000	=	$130x - [(100x) + (10.000)]$
	=	$30x - 10.000$
$30x$	=	21.000
x	=	700 adet ürün satmalıdır.

SIRA SİZDE 1

1) Verilen denklemleri çözünüz.

a) $4 + 5(2x - 3) = 3(4x - 1)$

b) $3x - 4(2 - x) = 3(x - 2) - 4$

c) $3[2 - 4(2x - 1)] = 4x - 10$

d) $5[2 - (2x - 4)] = 2(5 - 3x)$

2) Verilen denklemleri çözünüz.

a) $3x^2 + x - 2 = 0$

b) $2x^2 - x - 3 = 0$

c) $33x^2 + 34x - 35 = 0$

d) $8x^2 - 22x + 15 = 0$

e) $4x(3x - 2) - 7(3x - 2) = 0$

f) $2x(5x - 2) - 3(2 - 5x) = 0$

g) $x^2 - 81 = 0$

h) $x^2 + 14x + 49 = 0$

ı) $x^2 + 64 = 0$

i) $25x^2 - 5x = 0$

3) Verilen denklemleri çözünüz.

a) $12x^3 - 75x = 0$

b) $x^3 + 4x^2 + 4x = 0$

c) $x^4 + 2x^3 - 35x^2 = 0$

d) $2x^3 + 16x^2 + 66x = 0$

EŞİTSİZLİKLER

AMAÇ 3

Birinci ve ikinci derece eşitsizliklerin çözümlerini bulabileceksiniz.

Eşit olmayan ve sıralanabilen iki cebirsel ifadeden birinin diğerinden büyük (veya büyük eşit, küçük veya küçük eşit) olduğunu belirleyen bağıntıya **eşitsizlik** denir. Bu kesimde eşitsizliklerin çözüm kümelerinin bulunuşu üzerinde duracağız.

$ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$ veya $ax + b > 0$ biçiminde yazılabilen bir eşitsizliğe birinci dereceden eşitsizlik denir.

ÖRNEK 10

$3 + 5x \leq 3x - 9$ ***eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$5x - 3x \leq -9 - 3$$
$$2x \leq -12$$
$$x \leq -6$$

bulunur. -6 ya eşit ve -6 dan küçük x lerin kümesi verilen eşitsizliğin çözüm kümesidir. $Ç = \{x \mid x \leq -6\} = (-\infty, -6]$ aralığıdır.

ÖRNEK 11 $7 \leq 2 - 5x < 9$ ***eşitsizliğini çözünüz.***

ÇÖZÜM

Verilen eşitsizlik $7 \leq 2 - 5x$ ve $2 - 5x < 9$ eşitsizliklerinin bir arada yazımıdır. **Böyle bir eşitsizliğin çözüm kümesi, eşitsizliklerin ayrı ayrı çözümlerinden elde edilen çözüm kümelerinin kesişimidir.** Ancak, bu iki eşitsizliğin birlikte çözümü aşağıdaki biçimde de mümkündür.

$7 \leq 2 - 5x < 9$

$(-2) + 7 \leq (-2) + 2 - 5x < (-2) + 9$

$5 \leq -5x < 7$

$\left(-\frac{1}{5}\right) . 5 \geq \left(-\frac{1}{5}\right)(-5x) > \left(-\frac{1}{5}\right) . 7$

(eşitsizliğin her üç yanını $-\frac{1}{5}$ negatif sayısı ile çarptığımızdan eşitsizlikler yön değiştirdi.)

$-1 \geq x > -\frac{7}{5}$

bulunur. Son ifade $Ç = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{7}{5} < x \leq -1\right\} = \left(-\frac{7}{5}, -1\right]$ olduğunu verir.

Birinci derece bir bilinmeyenli eşitsizlikler tablo ile de çözülür. Bunun için $ax + b$ cebirsel ifadesinin işareti incelenmelidir. Bu ifade $x = -\frac{b}{a}$ için 0 (sıfır) olduğundan tablo aşağıdaki gibi düzenlenir.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	a nın işaretinin tersi	0	a nın işaretinin aynısı

ÖRNEK 12 $5(x - 2) > 9x - 3(2x - 4)$ ***eşitsizliğini çözünüz.***

ÇÖZÜM

1. Yol

$5x - 10 > 9x - 6x + 12$

$5x - 10 > 3x + 12$

$5x - 3x > 10 + 12$

$2x > 22$

$x > 11$

$Ç = (11, +\infty)$

2. Yol

$5x - 10 > 9x - 3(2x - 4)$

$2x - 22 > 0$

$2x - 22 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 11$

x	$-\infty$	11	$+\infty$
$2x - 22$	-	0	+

$Ç = (11, +\infty)$ olur.

ÖRNEK 13

Bir malın alış fiyatı x lira ve satış fiyatı y liradır. Satış için iki durum söz konusudur.

I. Durum **:** $y = 3x + 1300$

II. Durum **:** $y = 7x - 1100$

II. Durum I. Durum'dan daha kârlı ise x tam sayı olarak en az kaç lira olmalıdır?

ÇÖZÜM

$3x + 1300 < 7x - 1100$

$2400 < 4x$

$600 < x$ olur. $x = 601$ lira olmalıdır.

ÖRNEK 14

A ve B gibi iki oto kiralama firmasından A firması bir arabayı günlük 3.200.000 TL. ve kilometre başı 40.000 TL ye, B firması ise aynı marka bir arabayı günlük 4.000.000 TL ve kilometre başı 32.000 TL ye kiraya veriyor. A firmasından bir haftalığına araba kiralayan bir kişinin bu firmaya ödeyeceği paranın, B firmasına ödemesi gereken paradan az olması için bu kişinin arabayı en fazla kaç km. kullanması gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$7\ (3.200.000) + x\ (40.000) < 7\ (4.000.000) + x\ 32.000$

$x\ (8.000) < 7\ (800.000)$

$x < 700$

kullanacağı maksimum kilometre 699 km. olmalıdır.

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ veya $ax^2 + bx + c \leq 0$ biçiminde bir eşitsizliğe ikinci derece eşitsizlik denir. Bu tür bir eşitsizliğin çözümü için $ax^2 + bx + c$ üç terimlisinin işareti incelenmelidir.

Bunun için üç durum söz konusudur.

1. DURUM : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin iki farklı çözümü vardır. $x_1 < x_2$ olmak üzere kökler x_1 , x_2 olur.

x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a nın işaretinin aynısı	0	a nın işaretinin tersi	0	a nın işaretinin aynısı	

2. DURUM : $\Delta = 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ ın eşit iki kökü var ve $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a nın işaretinin aynısı	0	a nın işaretinin aynısı	

3. DURUM : $\Delta < 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ 'ın kökü yoktur. Bu durumda

(i) $a > 0$ ise daima $ax^2 + bx + c > 0$ (işareti daima pozitif)

(ii) $a < 0$ ise daima $ax^2 + bx + c < 0$ (işareti daima negatif) olur.

ÖRNEK 15

a) $x^2 - 3x > 4$ ***b)*** $x^2 \leq 5x - 4$ ***c)*** $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ ***d)*** $3x^2 + x + 4 \geq 0$

eşitsizliklerini çözünüz.

ÇÖZÜM

a) $x^2 - 3x - 4 > 0$ eşitsizliğini çözmek için

- Önce $x^2 - 3x - 4 = 0$ denklemi çözülür.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9 + 4 \, . \, 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$x_1 = -1$, $x_2 = 4$ bulunur.

- Sonra $x^2 - 3x - 4$ ün işareti incelenir.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Pozitif işaretli yerler çözüm olacağından çözüm kümesi taralı kısım olan $Ç = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ kümesi olur.

b) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

- $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1 , x_2 = 4$

-

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $Ç = [1 , 4]$

c) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

- $x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = -3$ olur.

-

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x^2 + 6x + 9$		$+$	0	$+$	

- ifade -3 de sıfırdır ve diğer hiçbir noktada negatif olmaz. Bu nedenle $Ç = \{-3\}$

d) $3x^2 + x + 4 \geq 0$

- $3x^2 + x + 4 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 . 4 . 3 = -47 < 0$ olduğundan gerçel kök yoktur ve a = 3 > 0 olduğundan $3x^2 + x + 4$ daima pozitiftir. $Ç = \mathbb{R}$ olur.

Eşitsizlikler kullanılarak $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ biçimindeki köklü deklemler çözülebilirler.

$$\sqrt{P(x)} = Q(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ve } P(x) = Q(x)^2$$

Uygulamada $P(x) = (Q(x))^2$ denklemi çözülür ve çıkan çözümlerden orijinal denklemi sağlayanlar alınır.

ÖRNEK 16

$\sqrt{3x+4} - x = 2$ ***denklemini çözünüz.***

ÇÖZÜM

$$\sqrt{3x+4} = x+2 \Rightarrow \left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = (x+2)^2$$

$$\Rightarrow 3x+4 = x^2 + 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -1$$

Bunlar verilen denklemi sağlar. $Ç = \{-1 , 0\}$ dır.

Aşağıdaki bilgiler ve eşitsizlikler kullanılarak verilen mutlak değerli denklem ve eşitsizliklerin çözümleri bulunur.

- $| P(x) | = a \Leftrightarrow P(x) = \pm a$ olan x ler
- $| P(x) | < a \Leftrightarrow -a < P(x) < a$ olan x ler
- $| P(x) | > a \Leftrightarrow P(x) < -a$ veya $P(x) > a$ olan x ler

çözüm olur.

ÖRNEK 17

a) $| 2x - 5 | = 3$ ***b)*** $\left| \dfrac{1}{x-3} \right| < 3$ ***c)*** $| 2x + 3 | \leq 1$

ÇÖZÜM

a) $| 2x - 5 | = 3 \Leftrightarrow 2x - 5 = \pm 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow Ç = \{1 , 4\}$

b) $\left| \dfrac{1}{x-3} \right| < 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x-3|} < 3 \Leftrightarrow |x-3| \neq 0$ olmak üzere

$$|x-3| > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x - 3 < -\frac{1}{3} \text{ veya } x - 3 > \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow Ç = \left(-\infty , 3 - \frac{1}{3}\right) \cup \left(3 + \frac{1}{3} , +\infty\right)$$

$$= \left(-\infty , \frac{8}{3}\right) \cup \left(\frac{10}{3} , +\infty\right)$$

c) $|2x+3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x+3 \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 2x \leq -2$

$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1$

$\Leftrightarrow Ç = [-2\,,\,-1]$

SIRA SİZDE 2

1. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini belirleyiniz.
   a) $2(5x-8) \leq 7(x-3)$
   b) $3x - 2(3x-5) > 4(2x-1)$
   c) $4 + 2(3-2x) \leq 4(3x-5) - 6x$
2. Aşağıdaki eşitliklerin çözüm kümelerini bulunuz.
   a) $\sqrt{x-2} - 5 = 0$
   b) $\sqrt[3]{x+2} + 3 = 0$
   c) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x} = 2$
   d) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 5$
   e) $\left|\dfrac{x+1}{2x-1}\right| = 3$
3. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.
   a) $||2x-3|-1| < 10$
   b) $\left|\dfrac{2}{x-3}\right| > \dfrac{1}{5}$
   c) $|4x-7| \geq 4$

Cahit Arf (1910 - 1997)

Cebir konusundaki çalışmalarıyla dünyaca ünlü matematikçimiz. Sentetik geometri problemlerinin cetvel ve pergel yardımıyla çözülebilirliği konusunda yaptığı çalışmalar, cisimlerin kuadratik formlarının sınıflandırılmasında ortaya çıkan değişmezlere ilişkin "Arf değişmezi" ve "Arf halkalar" gibi literatürde adıyla anılan çalışmaları matematik dünyasının ünlü matematikçileri arsında yer almasını sağladı.
Matematiği bir meslek dalı olarak değil bir yaşam tarzı olarak görmüştür. Öğrencilerine her zaman "Matematiği ezberlemeyin kendiniz yapın ve anlayın" demiştir. Hakkında yazılmış bir yazıda şöyle denilmiştir: "... Bir zamanlar integrali bilen kimselerin matematikçi, üstel fonksiyonu bilenlerin ise büyük matematikçi sayıldığı ülkemizde derin matematik konularının tartışılacağı hayal bile edilemezdi. Cahit Arf ,Türkiye' de matematiğin o günlerden bu günlere gelmesinde en büyük rolü oynamıştır."

Kendimizi Sınayalım

1. $3x - (1 - 2x) = 9$ denkleminin kökü kaçtır?

a. -3
b. -2
c. 2
d. 3
e. 5

2. $1 - \dfrac{2}{1 - \dfrac{4}{3x}} = 9$ denkleminin kökü kaçtır?

a. $\frac{4}{3}$
b. $\frac{16}{15}$
c. 1
d. $\frac{15}{16}$
e. $\frac{3}{4}$

3. $\dfrac{a}{3} + \dfrac{1}{1 - x} = \dfrac{8}{x + 2}$ denkleminin bir kökü 2 ise a aşağıdakilerden hangisidir?

a. -9
b. -6
c. 5
d. 6
e. 9

4. $\dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. {-1/3 , 1}
b. {-1 , 1}
c. {-1/3}
d. {-1}
e. {-1 , 1 , 1/3}

5. $\dfrac{4x}{5} + 5 = x - \dfrac{1 + x}{5}$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. {3}
b. {5}
c. {7}
d. $\mathbb{R}$
e. ∅

6. $3xy + y - 6x - 2 = 0$ ise y sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

a. -2
b. 1
c. 2
d. 3
e. 4

7. $x^2 (2x - 1) - 3x (2x - 1) + 2 (2x - 1) = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. {1/2}
b. {1 , 2}
c. {1/2 , 1 , 2}
d. ∅
e. {-1 , -2}

8. $2 (3x - 1) > 3x + 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. (-∞ , 2)
b. (-∞ , 2]
c. (2 , ∞)
d. [2 , ∞)
e. ∅

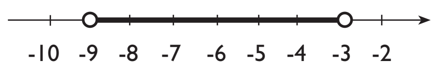
9. $15 - 5 (3 - 2x) \leq 4 (x - 3)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a. {-∞,∞}
b. (-∞ , -2]
c. [-2 , ∞)
d. [-2 , ∞)
e. [-∞ ,2)

10. $\sqrt{13 - 4x} - x = 4 - 2x$ çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

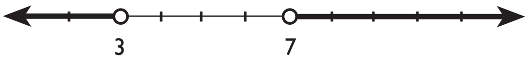
a. {1}
b. {1,3}
c. {-1,3}
d. {1,-3}
e. {-1,-3}

11.



Çözüm kümesi sayı doğrusu üzerinde koyu olarak verilen eşitsizlik aşağıdakilerden hangisidir?

a. $-9 \leq x < -3$
b. $-9 < x \leq -3$
c. $-9 \leq x \leq -3$
d. $|x - 6| < 3$
e. $|x + 6| < 3$

12. 

kümesi aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilir?

a. $(-\infty\ ,\ -3) \cup (7,\ +\infty)$

b. $(-\infty\ ,\ 3) \cup [7,\ +\infty)$

c. $(-\infty\ ,\ 3] \cup [7,\ +\infty)$

d. $(-\infty\ ,\ 3) \cup (7,+\infty)$

e. $(3,7)$

Biraz Daha Düşünelim

1. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$ ve $Q(x) \neq 0$

"payı sıfır yapan paydayı sıfır yapmayan *x* ler" bilgisini kullanarak verilen denklemleri çözünüz.

a) $\dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 6x + 3} = 0$

b) $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 8x + 15} = 0$

c) $\dfrac{2x^3 + 2x^2 - 4x}{x^3 + 2x^2 - 3x} = 0$

d) $\dfrac{3x^3 - 12x}{6x^3 - 2x^2 + 24x} = 0$

2. x liraya mal edilen bir malın satış fiyatı y lira olsun. Bu malın satış fiyatının hesaplanmasında iki yol önerilmektedir:

1. YOL : $y = x + 100$

2. YOL : $y = 4x - 200$

Üretilen malın tümü satılabildiğine ve satış fiyatının hesaplanmasında 2. YOL u kullanmak daha kârlı olduğuna göre x maliyeti **en az kaç liradır?**

3. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.

a) $3 + 2(x+5) \geq x + 5(x+1) + 1$

b) $10 - 13(2-x) < 5(3x-2)$

c) $-3 \leq 7x - 14 \leq 3$

4. Aşağıdaki eşitlikleri çözünüz.

a) $|2x - 8| + 10 = 2$

b) $6 - |2x + 4| = 1$

5. Aşağıda verilen eşitlikleri çözünüz.

a) $\sqrt{x + 1} + x = 5$

b) $\sqrt{x - 4} + x = 6$