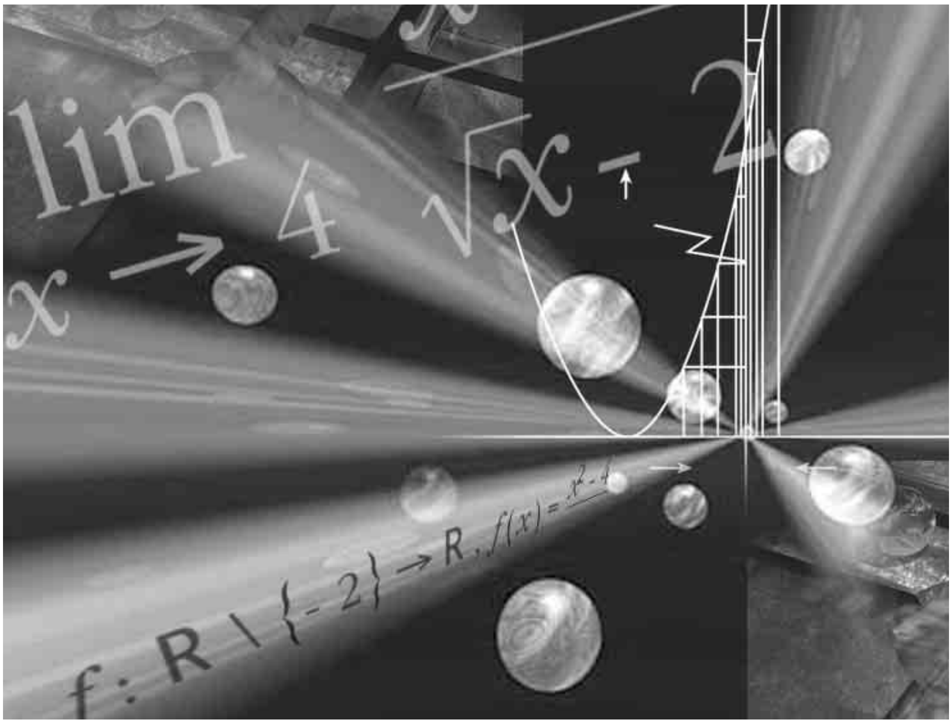
Limit ve Süreklilik 5



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *bir fonksiyonun, bir nokta civarındaki davranışını inceleyebilecek yani bu noktadaki limitini bulacak,*
- *bir fonksiyonun limitini daha kolay bulabilecek,*
- *fonksiyonun bir noktadaki limitini; bu noktaya sağdan ve soldan yaklaşan değerlerle bulacak,*
- *fonksiyonun bir noktadaki limiti ile bu noktadaki değeri arasındaki ilişkiyi karşılaştıracak,*
- *fonksiyonun en küçük ve en büyük değerinin olup olmadığını araştırabileceksiniz.*

İçindekiler

DİKKAT

- ***Yanınızda bir hesap makinesi bulundurunuz.***
- ***Örneklerde sizin yapmanızı istediğimiz işlemleri mutlaka yapınız.***
- ***Fonksiyonun grafiğini çizerek limitin ne anlama geldiğini grafikten görmeye çalışınız.***
- ***Bir noktada sürekli bir fonksiyonla, süreksiz fonksiyonun davranışları arasındaki farkı grafik üzerinde görmeye çalışınız.***

Giriş

Matematiğin, ekonomi ve diğer uygulamalı bilimlerde en çok kullanılan kavramları olan türev ve integral kavramları limit kavramı üzerine inşa edilmişlerdir. Matematikte başka kavramlara da anlam kazandıran limit kavramı, bu nedenlerden dolayı matematiğin en temel kavramlarından birisidir.

Biz bu ünitede, limit kavramını ve onunla çok yakından ilgili bir diğer önemli kavramı, sürekliliği inceleyeceğiz. İncelememizde sizler için gereksiz ve sıkıcı ayrıntılar içeren kesin matematiksel yaklaşım yerine sezgisel yaklaşıma ağırlık vereceğiz. Tanımları ve temel özellikleri belirli bir bütünlük içerisinde örneklerle açıklayacağız. Daha çok matematikçileri ilgilendiren teorik yaklaşımlara yer vermeyeceğiz.

LİMİT KAVRAMI

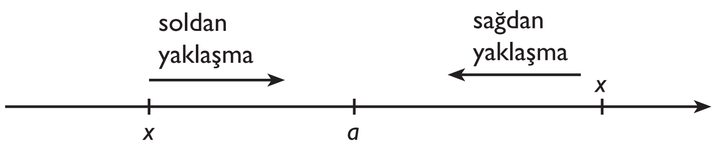
Daha önceki ünitelerde, tanım kümesi gerçel sayılar kümesinin bir alt kümesi olan bir fonksiyon verildiğinde, bu fonksiyonun tanım kümesine ait bir noktadaki değerini bulmak için bu sayıyı fonksiyon ifadesinde yerine yazıp gerekli işlemleri yapmamız gerektiğini görmüştük. Bu işlemleri yaparken zaman zaman hesap makinesine ihtiyaç duymanın ötesinde büyük bir zorlukla karşılaşmayız. Ancak fonksiyonlarla çalışırken x bağımsız değişkeni belirli bir sayıya yaklaşırken, $y = f(x)$ fonksiyon değerlerinin belirli bir sayıya yaklaşıp yaklaşmadığını, yaklaşıyorsa hangi sayıya yaklaştığını bilmek durumuyla da sık sık karşılaşırız. İşte bu soruna limit kavramıyla çözüm bulabilmekteyiz.

Limit kavramına geçmeden önce, x bağımsız değişkeninin verilen bir sayıya yaklaşmasının ne demek olduğunu açıklayalım. x değişken, a sabit olmak üzere x ve a gerçel sayılarını düşünelim. Eğer x değişkeni, a dan farklı ve a sayısına istenildiği kadar yakın değerler alıyorsa, diğer bir deyişle, x ile a arasındaki fark x değiştiğinde istenildiği kadar küçük bir sayıdan daha küçük kalıyorsa, x değişkeni a sayısına yaklaşıyor denir ve sembolik olarak $x \to a$ biçiminde gösterilir.

Eğer x değişkeni a ya a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa, bu tür yaklaşmaya sağdan yaklaşma denir ve $x \to a^+$ biçiminde gösterilir; eğer x değişkeni a ya a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa, bu durumda da x değişkeni a ya soldan yaklaşıyor denir ve $x \to a^-$ biçiminde gösterilir.

Sayı doğrusu üzerinde, a dan büyük sayıların a nın sağındaki, a dan küçük sayıların ise a nın solundaki noktalarla temsil edildiğini hatırlayınız.

Aşağıdaki tabloda x değişkeninin 0 sayısına soldan, sağdan ve her iki yönden yaklaşmasına birer örnek verilmiştir.



x	x	x
-3	4	3
-2	3	1
-1	2	-1
-0,5	1	-0,2
-0,1	0,5	0,1
-0,01	0,2	0,01
-0,001	0,1	-0,01
-0,0001	0,001	0,0001
	0,0001	-0,001
	0,00001	0,00001
⋮	⋮	⋮
$x \to 0^-$	$x \to 0^+$	$x \to 0$

Bağımsız değişkenin sabit bir sayıya yaklaşmasını açıkladıktan sonra, asıl sorunumuzu ele alabiliriz. Sorunumuz, x bağımsız değişkeni, tanım kümesi içinde kalarak belirli bir a sayısına yaklaşırken $f(x)$ fonksiyon değerlerinin belirli bir L sayısına yaklaşıp yaklaşmadığını araştırmaktı. İncelememize başlamadan önce bir noktaya açıklık getirmemiz gerekmektedir.

İncelememizde, a sayısına yaklaşan x değerlerine karşılık gelen $f(x)$ değerleri söz konusu olduğundan, $f(x)$ değerlerinin anlamlı olabilmesi için a ya yaklaşan x değerlerinin fonksiyonun tanım kümesine ait olması gerekmektedir. Diğer bir deyişle a sayısı olarak ancak tanım kümesindeki elemanlarla istenildiği kadar yaklaşılabilen sayıların alınması zorunludur. Şimdi asıl problemimize dönelim.

Önce problemimize örneklerle açıklık getirmeye çalışalım. Örnek olarak, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonda x değişkeni 2 ye yaklaşırken $f(x)$ fonksiyon değerlerinin belirli bir sayıya yaklaşıp yaklaşmadığına bakalım.

Aşağıdaki tabloda 2 ye 2 den küçük ve 2 den büyük değerlerle yaklaşan x değerlerine karşılık gelen $f(x)$ değerleri verilmiştir.

x	$f(x) = 2x - 3$
0	-3
1	- 1
1,5	0
1,7	0,4
1,9	0,8
1,99	0,98
1,999	0,998
1,9999	0,9998
⋮	⋮
$x \to 2^-$	$f(x) \to 1$

x	$f(x) = 2x - 3$
4	5
3	3
2,5	2
2,2	1,4
2,1	1,2
2,01	1,02
2,001	1,002
2,0001	1,0002
2,00001	1,00002
⋮	⋮
$x \to 2^+$	$f(x) \to 1$

Tablodaki örneğimize göre, hem $x \to 2^-$ ve hem de $x \to 2^+$ için fonksiyon değerleri 1 e yaklaşmaktadır. Siz de x e 2 ye yaklaşan başka örnek değerler vererek fonksiyon değerlerinin 1 e yaklaştığını görebilirsiniz. Bu örneklerimizi ne kadar çoğaltırsak çoğaltalım fonksiyon değerlerinin hep 1 sayısına yaklaştığını görürüz. İşte bu sayıya (yani 1 e) $f(x) = 2x - 3$ fonksiyonunun 2 noktasındaki limiti denir ve sembolik olarak

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (2x - 3) = 1$$

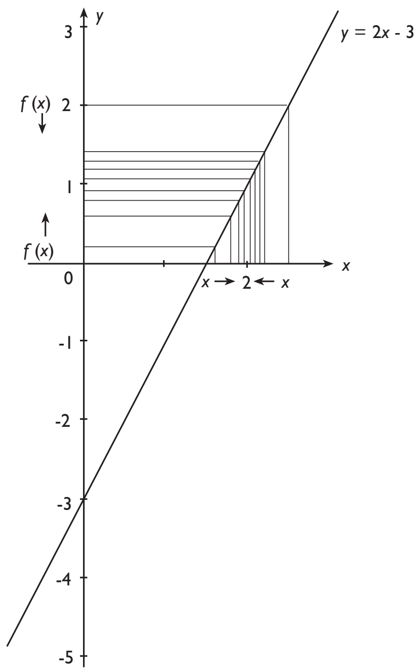
biçiminde gösterilir.

Bu durum bazen $x \to 2$ için $f(x) \to 1$ biçiminde de yazılır. Bunun anlamı: x değişkeni 2 ye (2 den farklı değerlerle) yaklaşırken fonksiyon değerleri 1 e yaklaşır demektir. Ayrıca;

$$\lim_{x \to 2} (2x - 3) = 1$$

olduğunu $f(x) = 2x - 3$ fonksiyonunun aşağıdaki grafiğinden de açıkça görebilmekteyiz.

$x \longrightarrow 2$ iken x in her zaman 2 den farklı olacağını unutmayınız.



Şekil 5.1

Aynı problemi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^2$ fonksiyonu için x in 0 a yaklaşması durumunda inceleyelim. x in 0 a soldan ve sağdan yaklaşmasına örnek olarak aşağıdaki tablodaki değerleri alıp fonksiyon değerlerinin davranışına bakalım.

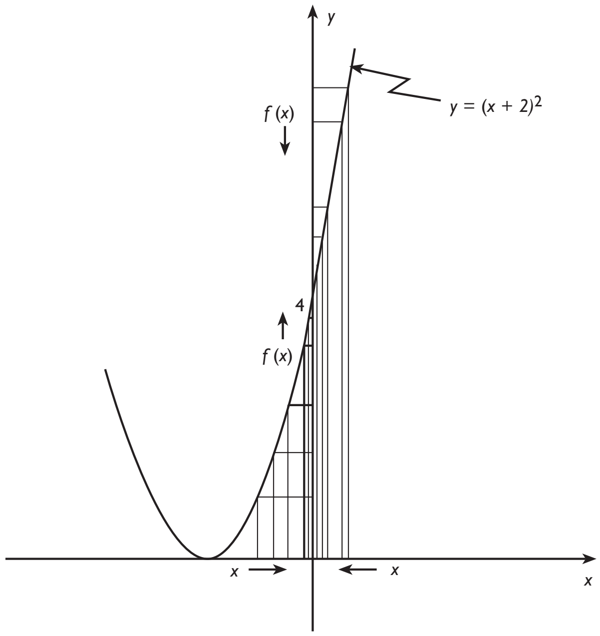
x	$f(x) = (x+2)^2$	x	$f(x) = (x+2)^2$
3	25	-3	1
2	16	-2	0
1	9	-1	1
0,5	6,25	-0,5	2,25
0,1	4,41	-0,1	3,61
0,01	4,0401	-0,01	3,9601
0,001	4,00400	-0,001	3,9960
0,0001	4,00040	-0,0001	3,9996
0,00001	4,00004	⋮	⋮
⋮	⋮		
$x \rightarrow 0^+$	$f(x) \rightarrow 4$	$x \rightarrow 0^-$	$f(x) \rightarrow 4$

x değişkeninin 0 a yaklaşan örnek değerlerine karşılık, x ister soldan, isterse sağdan yaklaşsın, $f(x)$ değerleri 4 e yaklaşmaktadır.

Aşağıdaki grafikten açıkça görebildğimiz gibi x değişkeni 0 a nasıl yaklaşırsa yaklaşsın fonksiyon değerleri 4 e yaklaşmaktadır. O halde

$$\lim_{x \to 0} (x+2)^2 = 4$$

tür diyebiliriz.



Şekil 5.2

Şimdi de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1 , & x \leq 0 \text{ ise,} \\ x^2 , & x > 0 \text{ ise,} \end{cases}$

fonksiyonunda $x \to 0$ için $f(x)$ değerlerinin belirli bir sayıya yaklaşıp yaklaşmadığını araştıralım.

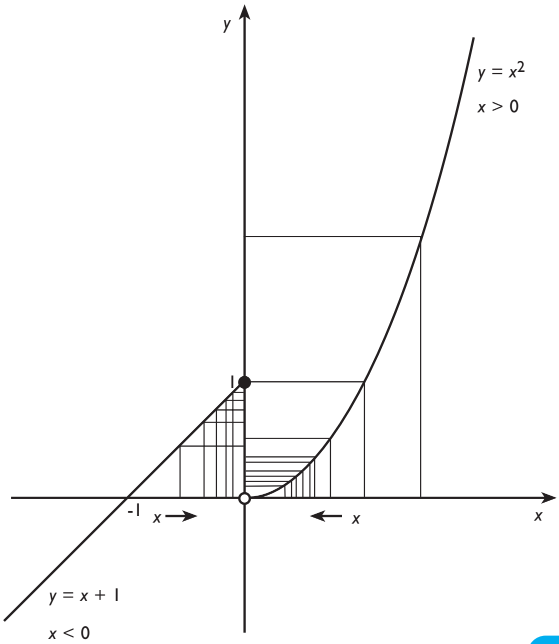
Bu örneğimizde, x değişkenine 0 a soldan ve sağdan yaklaşan değerler verip bunlara karşı gelen $f(x)$ değerlerini bulurken biraz daha dikkatli olmanız gerekmektedir. Çünkü $x < 0$ için $f(x) = x + 1$, $x > 0$ için $f(x) = x^2$ dir. Aşağıdaki tablo, bu durum dikkate alınarak oluşturulmuştur.

x	$f(x) = x + 1$	x	$f(x) = x^2$
-2	-1	2	4
-1	0	1	1
-0,5	0,5	0,5	0,25
-0,1	0,9	0,1	0,01
-0,01	0,99	0,01	0,0001
-0,001	0,999	0,001	0,000001
-0,0001	0,9999	0,0001	0,00000001
⋮	⋮	⋮	⋮
$x \to 0^-$	$f(x) \to 1$	$x \to 0^+$	$f(x) \to 0$

Tabloda gördüğünüz gibi, $x \to 0^-$ için $f(x) \to 1$ iken $x \to 0^+$ için $f(x) \to 0$ dır. x in 0 a yaklaşan değerlerine karşılık fonksiyon değerleri tek bir sayıya yaklaşmamaktadır. Bu durumda da $x \to 0$ için fonksiyonunun limiti yoktur diyoruz:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ yoktur.

Fonksiyonun aşağıdaki grafiğinden de limitin yokluğu çok açık biçimde görülmektedir.



Şekil 5.3

Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olmaması başka bir noktada da limitinin olmadığı anlamı taşımamaktadır. Örneğin, yukarıdaki f fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$ olduğunu grafiğe bakarak hemen söyleyebiliriz. Yine f fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ olduğunu görebiliriz.

Yukarıdaki örneklerimizde, $\lim\limits_{x \to 2} (2x - 3) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} (x + 2)^2 = 4$ olduğunu görmüştük. Bu iki örneği biraz dikkatle incelersek limit dediğimiz sayının, fonksiyon ifadesinde x yerine x in yaklaştığı sayının yazılmasıyla bulunabildiğini görebiliriz: $2.2 - 3 = 1$ ve $(0 + 2)^2 = 4$. Başka bazı fonksiyonlar için de doğru olan bu durum sizi yanıltmamalıdır. Limit konusunun bu kadar basit olmadığını incelememize devam ettikçe göreceksiniz. Örneğin, yukarıdaki son örneğimizde, fonksiyonun 0 daki değeri 1 olmasına karşılık fonksiyonun $x \to 0$ için limiti yoktur.

Yukarıdaki örnekte olduğu gibi parçalı tanımlı fonksiyonlarda, x in herhangi bir değerine karşılık gelen f(x) değerini bulurken fonksiyonu tanımlayan ifadelerden hangisini kullanmanız gerektiğine dikkat ediniz.

ÖRNEK 1

$f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

fonksiyonunun $x \to -2$ ***için limitini araştıralım.***

ÇÖZÜM

Dikkat ederseniz fonksiyon $x = -2$ noktasında tanımlı olmamasına karşılık, bu noktadaki limitinden söz etmekteyiz. Çünkü fonksiyonun tanım kümesi $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ dur ve x değişkeni bu kümedeki elemanlarla -2 sayısına istenildiği kadar yakın değerler alabilir.

Fonksiyon ifadesinde x yerine -2 yazarsak hem payın hem de paydanın 0 olduğunu görmekteyiz. Bu örnekte olduğu gibi 0/0 durumu ile karşılaştığımızda, 0/0 anlamlı olmamasına karşılık fonksiyonun limitinin olmadığını söyleyemeyiz.

Bu limiti hesaplamak için fonksiyonun ifadesine biraz daha yakından bakmamız gerekmektedir. $x \to -2$ iken daima $x \neq -2$ olacağından

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)} = \lim_{x \to -2} (x - 2) = -4$$

bulunur.

Fonksiyon bir noktada tanımlı olmadığı halde o noktada limiti olabilir.

Fonksiyonun bir noktada tanımlı olması halinde bu noktadaki değeri ile bu noktada limitinin varlığı ve varsa limitin değeri arasında doğrudan bir ilişki yoktur diyebiliriz.

Fonksiyon bir noktada tanımlı olmadığı halde o noktada limiti olabilir.

Fonksiyonun bir noktada tanımlı olması halinde bu noktadaki değeri ile bu noktada limitinin varlığı ve varsa limitin değeri arasında doğrudan bir ilişki yoktur diyebiliriz.

Buraya kadar örneklerle açıklamaya çalıştığımız limit kavramını şu şekilde tanımlayabiliriz.

$A \subset R$ olmak üzere, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $a \in \mathbb{R}$ sayısı A kümesine ait elemanlarla istenildiği kadar yaklaşılabilen bir nokta olsun. Eğer x bağımsız değişkeni A kümesine ait fakat a dan farklı değerlerle a ya yaklaşırken $f(x)$ fonksiyon değerleri tek bir L sayısına yaklaşıyorsa, f fonksiyonunun a noktasında limiti L ' dir denir ve bu durum $x \to a$ iken $f(x) \to L$ veya $\lim_{x \to a} f(x) = L$ biçiminde gösterilir.

Buna göre, tanımı yinelersek $\lim_{x \to a} f(x) = L$ demek, x değişkeni a dan farklı değerlerle a ya yaklaşırken f (x) fonksiyon değerleri L sayısına yaklaşıyor demektir.

SIRA SİZDE 1

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \leq 0 \text{ ise,} \\ 1 - x, & x > 0 \text{ ise,} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ olduğunu görünüz. Fonksiyonun grafiğini çizerek sonucu doğrulayınız.

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^2 - x + 5$ fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x \to -1} f(x) = 9$ olduğunu gösteriniz.

3) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^2, & x < 1 \text{ ise,} \\ 1, & x = 1 \text{ ise,} \\ x - 1, & x > 1 \text{ ise,} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz. Fonksiyonun grafiğini çizerek sonucu doğrulayınız.

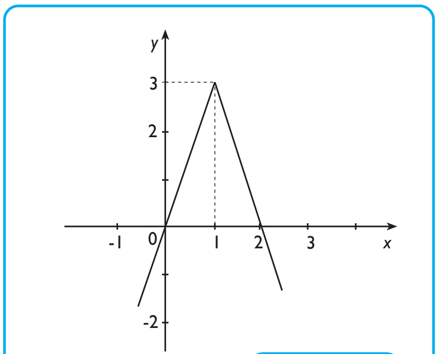
4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x+5} = ?$ **5)** $\lim\limits_{x \to 3} \left(x^2 - 2x\right) = ?$

6) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2} = ?$ **7)** $\lim\limits_{x \to 0} 10 = ?$

8) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} = ?$ **9)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-3x}{x^2-9} = ?$

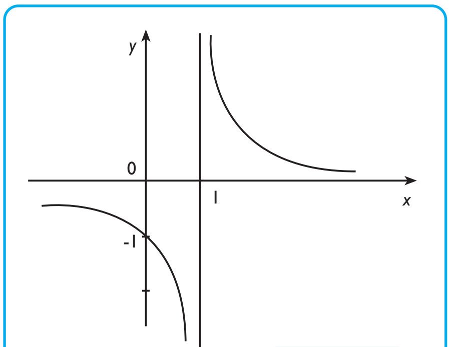
Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların $x \to 1$ için varsa limitlerini bulunuz.

10)



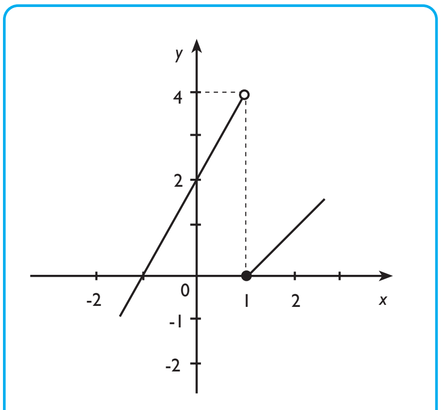
Şekil 5.4

11)



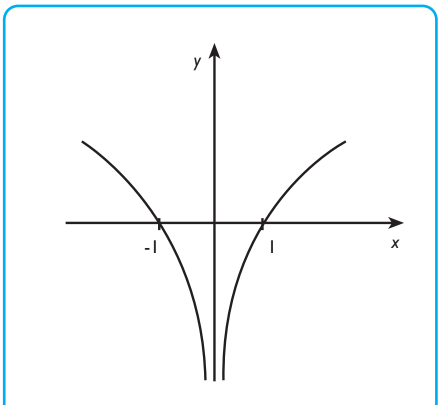
Şekil 5.5

12)



Şekil 5.6

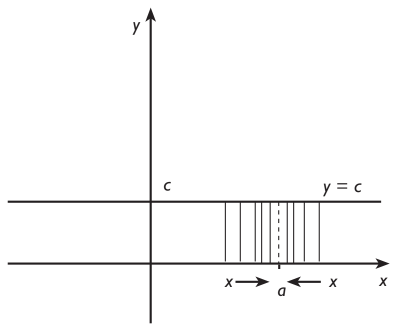
13)



Şekil 5.7

Limit Özellikleri

Bir önceki kesimde, limit kavramını, bazı basit sayılabilecek fonksiyonların bazı noktalarda limitini, sezgisel yaklaşıma ağırlık vererek açıklamaya çalıştık. Sizler tarafından anlaşılması oldukça zor olacağı için ve daha çok matematikçileri ilgilendirdiğine inandığımız kesin matematiksel tanımı vermedik. Ancak, yukarıda açıklamaya çalıştığımız yöntem zaman zaman sıkıcı sayısal işlemler gerektirmesine rağmen etkili bir yöntem de değildir. Çünkü, fonksiyonun a noktasında limitinin varlığını görmek için x değişkeni a ya nasıl yaklaşırsa yaklaşsın (yani sadece seçilen örnek değerler için değil), fonksiyon değerlerinin limit diyeceğimiz tek bir sayıya yaklaştığını göstermemiz gerekmektedir. Bu ise sanıldığından çok daha zor bir iştir. Biraz sonra vereceğimiz ve kanıtını yine matematikçilere bırakacağımız özellikler (teoremler) ve onların sonuçları bu zor işi biraz daha kolay hale getirebilmektedir.



Şekil 5.8

Sabit fonksiyonun herhangi bir noktada limiti vardır ve fonksiyon değeri olan sabit sayıya eşittir.

1. Özellik

c bir sabit olmak üzere, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ ise

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$$

dir.

Sabit fonksiyonun herhangi bir noktada limiti vardır ve fonksiyon değeri olan sabit sayıya eşittir.
Grafikten bu özelliğin doğruluğunu çok açık biçiminde görüyoruz.

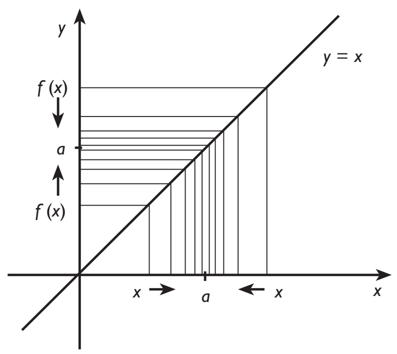
2. Özellik

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$
ise

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

dir.
Birim fonksiyonun herhangi bir a noktasında limiti vardır ve a ya eşittir.

Birim fonksiyonun herhangi bir a noktasında limiti vardır ve a ya eşittir.



Şekil 5.9

Toplamın limiti limitler toplamına eşittir.

3. Özellik

$f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin ve $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ olsun. Bu durumda $f + g$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında limiti vardır ve

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$$

dir.

Toplamın limiti limitler toplamına eşittir.

ÖRNEK 2 ***$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -3$ veriliyor. $x = 2$ noktasında $f + g$ fonksiyonunun limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

f fonksiyonu birim fonksiyon, g fonksiyonu sabit fonksiyon olduğundan her iki fonksiyonun 2 noktasında limiti vardır ve $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x = 2$, $\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} (-3) = -3$ tür. 3. özellikten $f + g$ nin 2 noktasında limiti vardır ve

$$\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to 2} [x + (-3)] = \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} (-3) = 2 + (-3) = -1$$

dir.
3. özellik sonlu tane fonksiyon için de doğrudur. f_1 , f_2 , ... , f_n fonksiyonlarının a noktasında limiti varsa,

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) + \ldots + \lim_{x \to a} f_n(x)$$

dir.

4. Özellik

$f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir $a \in \mathbb{R}$ noktasında limitleri var ve $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ ise $f \, . \, g$ fonksiyonunun bu noktada limiti vardır ve

$$\lim_{x \to a} (f \, . \, g)(x) = \lim_{x \to a} [f(x) \, . \, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \, . \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \, . \, L_2$$

dir.

Çarpımın limiti, limitlerin çarpımına eşittir.

Çarpımın limiti, limitlerin çarpımına eşittir.

4. özellikte $g(x) = c$ alınırsa,

$$\lim_{x \to a} [c \, f(x)] = \lim_{x \to a} c \, . \lim_{x \to a} f(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$$

sonucu elde edilir. Buna göre, bir fonksiyonun bir sabitle çarpımının limiti, fonksiyonun limitinin bu sabitle çarpımına eşittir.

Bir fonksiyonun bir sabitle çarpımının limiti, fonksiyonun limitinin bu sabitle çarpımına eşittir.

3. özellik ile 4. özelliğin sonucunu birleştirirsek,

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

diyebiliriz. Farkın limiti, limitler farkına eşittir.

Farkın limiti, limitler farkına eşittir.

5. Özellik

Limitlerin varlığı durumunda sonlu tane fonksiyonun çarpımının limiti, limitler çarpımına eşittir.

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \, . \, f_2(x) \, ... \, f_n(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \, . \lim_{x \to a} f_2(x) \, ... \lim_{x \to a} f_n(x)$$

dir.

ÖRNEK 3

$n \in \mathbb{N}$ ***olmak üzere*** $\lim_{x \to a} x^n$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to a} x^n = \lim_{x \to a} \underbrace{(x \, . \, x \, ... \, x)}_{\text{n tane}} = \underbrace{\lim_{x \to a} x \, . \lim_{x \to a} x ... \lim_{x \to a} x}_{\text{n tane}} = \underbrace{a \, . \, a \, ... \, a}_{\text{n tane}} = a^n$$

Buna göre,

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

dir.

ÖRNEK 4

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_0$, $n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$, b_0 , b_1 , ... , $b_n \in \mathbb{R}$ ***polinom fonksiyonunun*** $x = a$ ***noktasında limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

Yukarıdaki özellikler ve örneklerdeki bilgilerimizi kullanarak,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} [b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0] \\ &= \lim_{x \to a} b_n x^n + \lim_{x \to a} b_{n-1} x^{n-1} + ... + \lim_{x \to a} b_1 x + \lim_{x \to a} b_0 \\ &= b_n \lim_{x \to a} x^n + b_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} + ... + b_1 \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} b_0 \\ &= b_n \, . \, a^n + b_{n-1} \, . \, a^{n-1} + ... + b_1 \, . \, a + b_0 \end{aligned}$$

bulunur. Dikkat ederseniz bu değer polinom fonksiyonun a noktasındaki değeridir.

Polinom fonksiyonunun herhangi bir noktadaki limiti, fonksiyonun bu noktadaki değerine eşittir.

ÖRNEK 5

$\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 8)$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ fonksiyonu polinom fonksiyon olduğundan, bu limit $f(2)$ değerine eşittir.
Buna göre,

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 8) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 8 = -4$$

dir.
$x > 0$ ve $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to a} x^r = a^r$$

dir.

ÖRNEK 6

$\lim\limits_{x \to 8} \sqrt[3]{x^2}$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$ dir. $x > 0$ ve $r \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x \to a} x^r = a^r$ olduğundan

$$\lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x^2} = \lim_{x \to 8} x^{2/3} = 8^{2/3} = \left(2^3\right)^{2/3} = 4$$

bulunur.

ÖRNEK 7

$\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x}\,(3x^2 - 7x - 1)$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{x}\,(3x^2 - 7x - 1) = \lim_{x \to 4} \sqrt{x} \cdot \lim_{x \to 4} (3x^2 - 7x - 1)$$

$$= \sqrt{4} \cdot (3 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4 - 1) = 2 \cdot (48 - 28 - 1) = 38$$

bulunur.

6. Özellik

Bölümün limiti, paydanın limiti 0 dan farklı olmak koşuluyla, limitlerin bölümüne eşittir.

$f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin ve $g(x) \neq 0$ olsun. Eğer $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ ve $L_2 \neq 0$ ise $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ fonksiyonunun a noktasında limiti vardır ve $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $g(x) \neq 0$, $L_2 \neq 0$ dir.

ÖRNEK 8

$\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{2\sqrt[3]{x} + 3}{4x + 1}$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 8} \left(2\sqrt[3]{x} + 3\right) = 2 \cdot \sqrt[3]{8} + 3 = 7, \quad \lim_{x \to 8} (4x + 1) = 4 \cdot 8 + 1 = 33$$

olduğundan,

$$\lim_{x \to 8} \frac{2\sqrt[3]{x} + 3}{4x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 8} \left(2\sqrt[3]{x} + 3\right)}{\lim\limits_{x \to 8} (4x + 1)} = \frac{7}{33}$$

bulunur.

7. Özellik

$f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ olsun.
$n \in \mathbb{N}$ ve n çift iken $f(x) \geq 0$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

dir.
Özel olarak, $f(x) \geq 0$ ise

$$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt{L}$$

dir.

ÖRNEK 9

$\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{2x^3 - 7x}$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{2x^3 - 7x} = \sqrt{\lim_{x \to 4} (2x^3 - 7x)} = \sqrt{2 \,.\, 4^3 - 7 \,.\, 4} = \sqrt{100} = 10$$

dur.

8. Özellik

$f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$, $h: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin ve x in a sayısına yakın tüm değerleri için $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ eşitsizliği sağlansın. Eğer $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ oluyorsa, bu durumda f fonksiyonunun a noktasında limiti vardır ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$$

dir.

Şimdi yukarıda verdiğimiz özellikleri kullanarak bazı fonksiyonların limitlerinin nasıl bulunacağını örneklerle açıklayalım.

ÖRNEK 10

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 6}{5x^2 - 20}$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 2} (3x - 6) = 0$ ve $\lim\limits_{x \to 2} (5x^2 - 20) = 0$ olduğundan 6. özelliği kullanamayız. Bu durumda fonksiyonu biraz daha dikkatli incelememiz gerekir. x, 2 ye yaklaştığından $x \neq 2$ dir. Dolayısıyla

$$\frac{3x - 6}{5x^2 - 20} = \frac{3(x - 2)}{5(x^2 - 4)} = \frac{3(x - 2)}{5(x - 2)(x + 2)} = \frac{3}{5(x + 2)}, \ x \neq 2$$

yazabiliriz. Buna göre,

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x - 6}{5x^2 - 20} = \lim_{x \to 2} \frac{3}{5(x + 2)} = \frac{3}{5 \,.\, 4} = \frac{3}{20}$$

bulunur.

ÖRNEK 11 $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 9} (x-9) = 0$, $\lim\limits_{x \to 9} (\sqrt{x}-3) = 0$ dır. x 9 dan farklı olduğundan

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 3^2}{\sqrt{x}-3} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{x}+3$$

veya

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x})^2-3^2} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)}$$

$$= \sqrt{x}+3 \,, \quad x \neq 9$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \to 9} (\sqrt{x}+3) = \sqrt{9}+3 = 6$$

bulunur.

Bu iki örneğe dikkat ederseniz her iki örnekte de pay ve payda 0 a yaklaşırken limit, birincisinde 3/20, ikincisinde 6 bulundu. Bunlardan şu sonucu çıkarıyoruz: $x \to a$ için bir kesrin hem payı hem de paydası sıfıra yaklaşıyorsa, kesrin limiti tamamen kesre bağlıdır, genel bir sonuç söylenemez. Bu nedenle bu durumda $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır denir. $\frac{0}{0}$ belirsizliği limitin yokluğu anlamı taşımaz, sadece limitin varsa değerinin kesre bağlı olduğunu ifade eder.

SIRA SİZDE 2 Aşağıdaki limitleri hasaplayınız.

1) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 3x - 1)$

2) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - \sqrt{2}\, x + 1)$

3) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} (x^2 - \sqrt{8}\, x + 1)$

4) $\lim\limits_{x \to 81} \sqrt{x}$

5) $\lim\limits_{x \to 32} \sqrt[5]{x}$

6) $\lim\limits_{x \to 6} \sqrt[3]{x}$

7) $\lim\limits_{x \to 1} (2x+1)(x-3)$

8) $\lim\limits_{x \to 8} (\sqrt[3]{x}+1)(3x-1)$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sqrt{x}-1}{3x+4}$,

10) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{x+1}$

11) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+2x-1}{x^2+1}$

12) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2+5x+2}$

13) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^3-4x^2+9}$

14) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{\sqrt{3x-2}}$

15) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

16) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

17) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3-5x^2+4x}{x^2+6x}$

Tek Yönlü Limitler

Yukarıdaki incelemizde, a noktasındaki limiti incelerken x bağımsız değişkeni a ya nasıl yaklaşırsa yaklaşsın $f(x)$ değerlerinin belli bir sayıya yaklaşıp yaklaşmadığını araştırdık. Ancak, bazı durumlarda x in a ya sadece a dan büyük (yani sağdan) değerlerle yaklaşması veya sadece a dan küçük (yani soldan) yaklaşması zorunlu olabilir. İşte bu durumlarda tek yönlü limit söz konusudur.

Eğer $x \to a^+$ için f fonksiyonunun L gibi bir limiti varsa, bu limite a noktasındaki **sağdan limit** denir ve

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.

Benzer şekilde, $x \to a^-$ için f fonksiyonunun L gibi bir limiti varsa bu limite de **soldan limit** denir ve

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

dir.

Yani, sağdan ve soldan limitlerin her ikisinin de söz konusu olduğu bir noktada limit varsa, hem sağdan hem de soldan limit vardır ve bunlar birbirine eşittir. Karşıt olarak sağdan ve soldan limitler var ve birbirine eşit ise bu noktada limit vardır. Sağdan ve soldan limitlerin birisi yoksa veya bu iki limit eşit değilse limit yoktur.

a noktasına her iki yönden yaklaşılabilindiği durumlarda, a noktasında limitin varolması için gerek ve yeter koşul, hem sağdan ve hem de soldan limitlerin var ve birbirine eşit olmasıdır.

ÖRNEK 12

$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ ve $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$ ***limitlerini bulalım.***

ÇÖZÜM

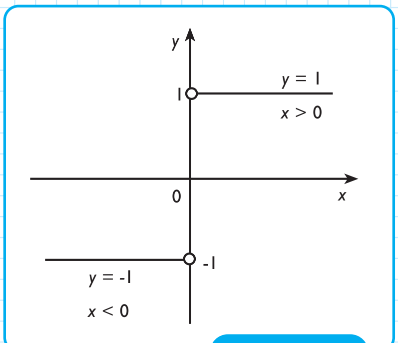
$x \to 0^+$ iken $x > 0$ olduğundan $|x| = x$ dir.
Buna göre

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$x \to 0^-$ iken $x < 0$ olduğundan $|x| = -x$ dir.
Buna göre,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

olur.



Şekil 5.10

Bu fonksiyonun hem sağdan ve hem de soldan limitleri vardır ve sırasıyla 1 ve -1 dir. Bu iki limit birbirine eşit olmadığından

$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ yoktur.

ÖRNEK 13

$$f: R \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \le 2 \text{ ise,} \\ x + 3, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ ve $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ***limitlerini araştıralım.***

ÇÖZÜM

$x \to 2^-$ için $x < 2$ dir. Dolayısıyla bu durumda $f(x) = 3x - 1$ dir. Buna göre,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3x - 1) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

dir. $x \to 2^+$ için $x > 2$ ve $f(x) = x + 3$ tür. Bu durumda

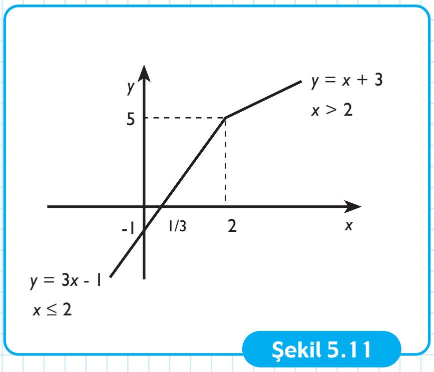
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 3) = 2 + 3 = 5$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$$

olduğundan

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

dir.



Şekil 5.11

Bazı durumlarda $x \to a$ (veya $x \to a^-$, $x \to a^+$) için fonksiyon değerleri istenildiği kadar büyük bir sayıdan daha büyük olabilir. Bu durumda **limit** ∞ **dur** denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \left(\text{veya} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty,\ \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty\right)$$

biçiminde gösterilir.

Benzer şekilde, $x \to a$ (veya $x \to a^-$, $x \to a^+$) için fonksiyon değerleri negatif yönde istenildiği kadar küçük sayıdan daha küçük olabilir. Bu durumda da **limit** $-\infty$ **dur** denir ve

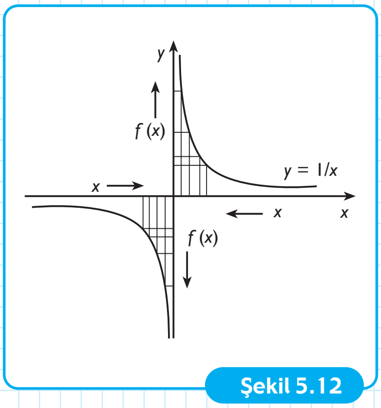
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \left(\text{veya} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty\right)$$

biçiminde gösterilir.

ÖRNEK 14

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ ve $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ ***limitlerini araştıralım.***

ÇÖZÜM



Şekil 5.12

Yandaki grafikten gördüğümüz gibi, x değişkenine pozitif ve sıfıra yaklaşan değerler verdiğimizde fonksiyon değerleri sınırsız olarak büyümektedir. Benzer şekilde x e negatif ve sıfıra yaklaşan değerler verdiğimizde fonksiyon değerleri negatif yönde sınırsız olarak küçülmektedir.

Bu nedenle

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

dur. Soldan ve sağdan limitler farklı olduğundan

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ yoktur.

ÖRNEK 15

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)^2},\ \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^2}\ \text{ve}\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$$

limitlerini araştıralım.

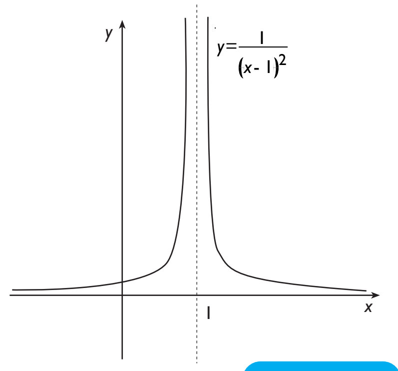
ÇÖZÜM

$x\to 1^-$ ve $x\to 1^+$ yaklaşmalarına örnekler vererek veya yandaki grafikten görebileceğimiz gibi,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty,\ \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$$

ve dolayısıyla $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$

dur.



Şekil 5.13

ÖRNEK 16

$\lim_{x\to 0}\frac{2x-3}{3x^2-x}$ ***limitini araştıralım.***

ÇÖZÜM

$x\neq 0$ olduğundan pay ve paydayı x e bölelim.

$$\frac{2x-3}{3x^2-x}=\frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x(3x-1)}=\frac{2-\frac{3}{x}}{3x-1}$$

dır. Buna göre,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-3}{3x^2-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2-\frac{3}{x}}{3x-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x-3}{3x^2-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2-\frac{3}{x}}{3x-1}=-\infty$$

dır. O halde

$\lim_{x\to 0}\frac{2x-3}{3x^2-x}$ yoktur.

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ olması limitin varlığı anlamı taşımaz. Sadece $x\to a$ için $f(x)$ değerlerinin sınırsız büyüdüğü anlamı taşır.

Benzer şekilde, $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ olması da $x\to a$ için $f(x)$ değerlerinin negatif yönde sınırsız küçüldüğünü ifade eder.

Bir fonksiyonun tanım kümesinde x değişkeni pozitif yönde sınırsız büyüyebilir veya negatif yönde sınırsız küçülebilir, bu durumları $x\to\infty$ veya $x\to-\infty$ biçiminde ifade ederiz. Bu durumlarda da fonksiyonun limitinden söz etmek mümkündür. Eğer $x\to\infty$ (veya $x\to-\infty$) için $f(x)$ değerleri belirli bir L sayısına yaklaşıyorsa, bu durumda da limit L dir denir ve

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L\ \left(\text{veya}\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=L\right)$$

biçiminde gösterilir.

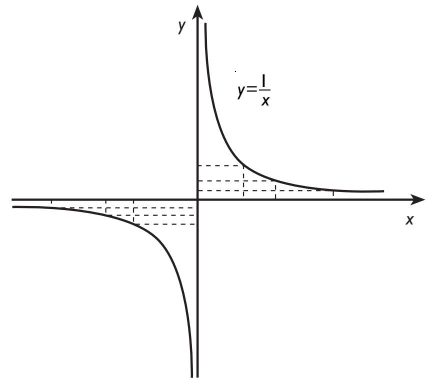
ÖRNEK 17 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$ ***limitlerini araştıralım.***

ÇÖZÜM

Yandaki grafikten gördüğümüz gibi x değişkenine pozitif yönde istenildiği kadar büyük veya negatif yönde istenildiği kadar küçük değerler verdiğimiz de fonksiyon değerleri 0'a yaklaşmaktadır. Bu nedenle hem $x \to -\infty$ ve hem de $x \to \infty$ için $f(x) \to 0$ olmaktadır. Yani

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \;,\; \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

dır.



Şekil 5.14

ÖRNEK 18 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{-x^2 + 4x + 7}$ ***limitini araştıralım.***

ÇÖZÜM

Fonksiyonda hem payı ve hem de paydayı x^2 ile bölelim.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{-x^2 + 4x + 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{-1 + \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{-1 + 0 + 0} = -3$$

bulunur.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \pm\infty , & n > m \text{ ise} \\ \dfrac{a_n}{b_m} , & m = n \text{ ise} \\ 0 , & n < m \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu gösterilebilir.

Bazı fonksiyonlarda x sınırsız büyürken fonksiyon değerleri, sınırsız büyüyebilir veya negatif yönde sınırsız küçülebilir. Bu durumları kısaca,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \;,\; \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

biçimlerinde ifade ederiz.

Benzer şekilde $x \to -\infty$ için $f(x) \to \infty$ veya $f(x) \to -\infty$ olabilir. Bu durumları da

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \;,\; \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

biçimlerinde ifade ederiz.

ÖRNEK 19

$$\lim_{x \to \infty} \left(2x^2 - 4x + 5\right) = \lim_{x \to \infty} x^2 \left(2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = \infty \,.\, (2 - 0 + 0) = \infty$$

bulunur.

ÖRNEK 20

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + x}{2x - 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2 - \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{2 - \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{\infty \,.\, (1 - 0 + 0)}{2} = \infty$$

SIRA SİZDE 3

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \le 0 \text{ ise} \\ x^2 + x, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$ olduğuna göre $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

2) $\lim_{x \to -1} \frac{|x + 1|}{x + 1} = ?$

3) $\lim_{x \to 1^-} \frac{|x - 1|}{x - 1} = ?$

4) $\lim_{x \to -\infty} \left(-x^2 + \frac{1}{x} - 5\right) = ?$

5) $\lim_{x \to \infty} \frac{x\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 10} = ?$

6) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 5x}{2 - x} = ?$

7) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 5x}{2 - x} = ?$

Süreklilik

Limit konusunu incelerken, bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ile fonksiyonun bu noktadaki değeri arasında doğrudan bir ilişki olmadığını ifade etmiştik. Bunula beraber bazı fonksiyonların a daki limiti ile a daki değerinin birbirine eşit olduklarını görmüştük. Bu özel durum fonksiyon davranışını incelemede önemli bir özellik olarak karşımıza çıkmaktadır. İşte bu durumda fonksiyon a noktasında süreklidir diyoruz. Buna göre sürekliliği şu şekilde tanımlayabiliriz:

$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $a \in A$ noktası verilsin. Eğer

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

oluyorsa, f fonksiyonuna **x = a noktasında süreklidir** denir. f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise, f fonksiyonu A üzerinde süreklidir denir.

Örneğin $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında süreklidir. Çünkü $\lim_{x \to 2} (2x - 3) = 1 = f(2)$ dir.

Yine limit konusunda $P(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ polinom fonksiyonunun herhangi bir a noktasındaki limitinin $P(a)$ olduğunu görmüştük. Buna göre, şu sonucu çıkarabiliriz.

$P(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ polinom fonksiyonu her $a \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir.

Sürekliliğin tanımına göre, $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir a noktasında sürekli olması için şu koşulların sağlanması gerekir:

- Fonksiyon a noktasında tanımlı olmalıdır,
- Fonksiyonun a noktasında limiti olmalıdır,
- Fonksiyonun a daki limiti a daki değerine eşit olmalıdır.

f fonksiyonu bir noktada sürekli değilse, f bu noktada **süreksizdir** denir.

ÖRNEK 21

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 0 \text{ ise} \\ x, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sürekli olup olmadığını inceleyelim.

ÇÖZÜM

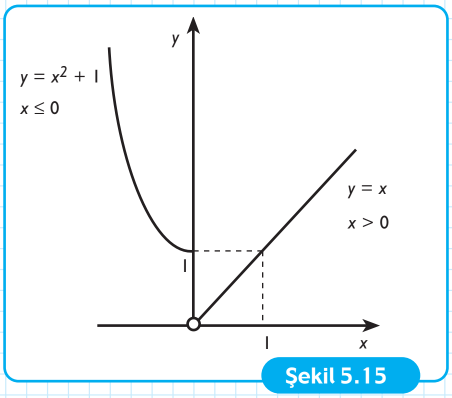
$f(0) = 0^2 + 1 = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

olduğundan, $\lim_{x \to 0} f(x)$ yoktur.

Buna göre f fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli değildir.

Buna karşılık bu fonksiyon $x = 1$ noktasında süreklidir. Gerçekten



Şekil 5.15

$f(1) = 1$, $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x = 1$, $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1$

olduğundan fonksiyon $x = 1$ noktasında süreklidir.

DİKKAT

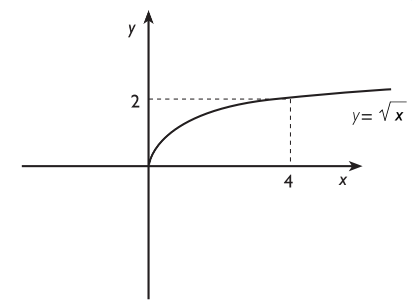
f fonksiyonunun grafiğinin $x = 0$ ve $x = 1$ deki durumu arasında bir fark görüyor musunuz?

Bir fonksiyon bir aralıkta sürekli ise, fonksiyonun grafiği olan eğri bu aralıkta kalem kaldırılmadan çizilebilir yani fonksiyon grafiğinde herhangi bir kopma olmaz.

Yanıtınız şöyle olmalıydı:

f fonksiyonunun grafiği olan eğride $x = 1$ noktasında herhangi bir kopma yoktur. Bir fonksiyon **bir aralıkta sürekli ise**, fonksiyonun grafiği olan eğri bu aralıkta kalem kaldırılmadan çizilebilir yani fonksiyon grafiğinde herhangi bir kopma olmaz.

ÖRNEK 22



Şekil 5.16

$f : [0 , \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

fonksiyonunun $x = 4$ noktasında sürekli olup olmadığını araştıralım.

Bir fonksiyona bir noktada süreklidir diyebilmek için aşağıdaki üç sorunun yanıtı evet olmalıdır.

- Fonksiyon bu noktada tanımlı mı?
- Fonksiyonun bu noktada limiti var mı?
- Fonksiyonun bu noktadaki değeri limitine eşit mi?

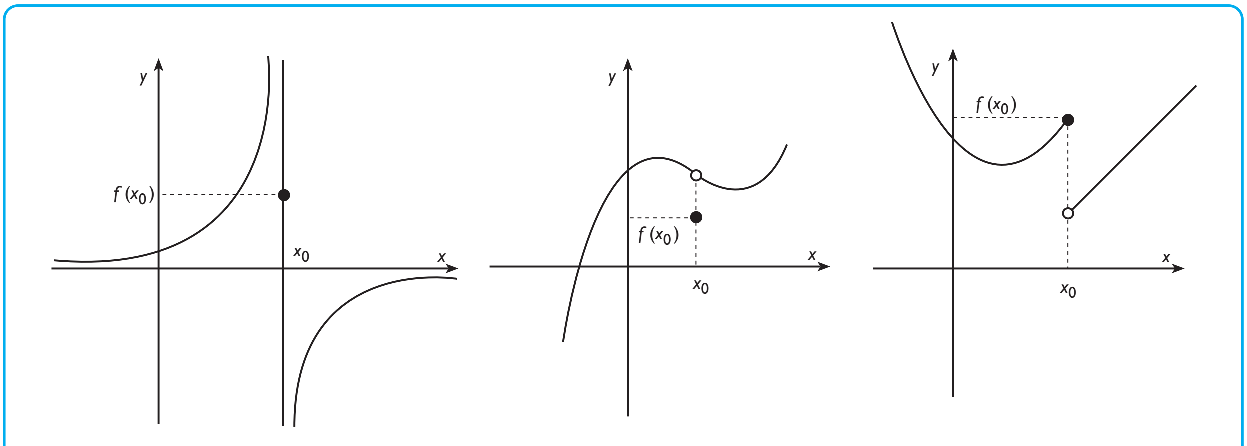
ÇÖZÜM

$f(4) = \sqrt{4} = 2$, $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2 = f(4)$

olduğundan fonksiyon $x = 4$ noktasında süreklidir.

Aşağıdaki şekilde x_0 noktasında süreksiz olan çeşitli fonksiyon grafikleri görülmektedir.

Fonksiyonun tanım kümesine ait bir noktaya karşılık, grafikte kopma, delinme ve sıçrama varsa bu noktalarda fonksiyonun sürekli olmadığını unutmayınız.



Şekil 5.17

$f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $x_0 \in A$ noktasında sürekli ise, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $g(x_0) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ fonksiyonları da $x_0 \in A$ noktasında süreklidir.

ÖRNEK 23

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 1$ ***fonksiyonları veriliyor*** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ***fonksiyonunun sürekliliğini inceleyelim.***

Bir fonksiyon bir noktada sürekli ise, bu nokta civarında bağımsız değişkendeki küçük değişiklikler fonksiyon değerlerinde "küçük" değişiklikleri doğurur. Fonksiyon bir noktada sürekli değilse, bu nokta civarında bağımsız değişkendeki küçük değişikliklerin fonksiyon değerlerinde aşırı büyük değişiklikler meydana getirebileceğini beklemeliyiz.

ÇÖZÜM

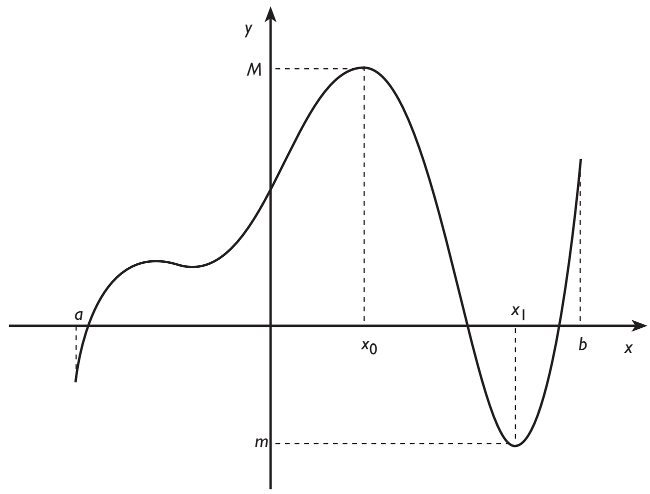
f ve g fonksiyonları polinom fonksiyon olduklarından her $x \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidirler. Ayrıca her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 + 1 \neq 0$ olduğundan

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x}{x^2 + 1}$$

fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli fonksiyondur.

Sürekli Fonksiyonların Özellikleri

$f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyon verilsin. Eğer her $x \in A$ için $f(x) \leq f(x_0)$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in A$ noktası varsa, $f(x_0)$ sayısına f fonksiyonunun A üzerinde **mutlak maksimum değeri,** diğer bir deyişle en büyük değeri denir. Benzer şekilde, her $x \in A$ için $f(x_1) \leq f(x)$ olacak şekilde en az bir $x_1 \in A$ noktası varsa, $f(x_1)$ sayısına f fonksiyonunun A üzerinde **mutlak minimum değeri** yani en küçük değeri denir.



Şekil 5.18

Şekilde grafiği verilen fonksiyonun mutlak maksimum değeri M, mutlak minimum değeri ise m dir.

Her fonksiyonun mutlak maksimum veya mutlak minimum değeri var olmak zorunda değildir.

$f: (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun, mutlak minimumu yoktur, ancak mutlak maksimum değeri 1 dir. Burada 0 ın tanım kümesine ait olmadığına dikkat ediniz.

$[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların davranışlarını daha kolay inceleyebiliriz. Şimdi bu özelliklerden bazılarını ele alalım.

1. Özellik

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon mutlak minimum ve mutlak maksimum değerlerini en az birer noktada alır. Yani her $x \in [a, b]$ için

$f(x_1) \leq f(x)$ ve $f(x) \leq f(x_2)$

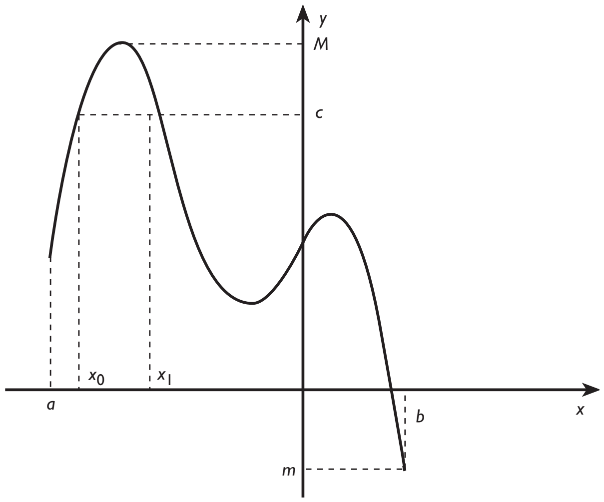
olacak şekilde en az birer x_1 , $x_2 \in [a, b]$ değerleri vardır.

2. Özellik

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon mutlak minimum ve mutlak maksimum değerleri arasındaki her değeri en az bir noktada alır. Yani, fonksiyonunun mutlak minimum değeri m, mutlak maksimum değeri M olmak üzere,

$m \leq c \leq M$

koşulunu sağlayan herhangi bir c sayısına karşılık $f(x_0) = c$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in [a, b]$ sayısı vardır.

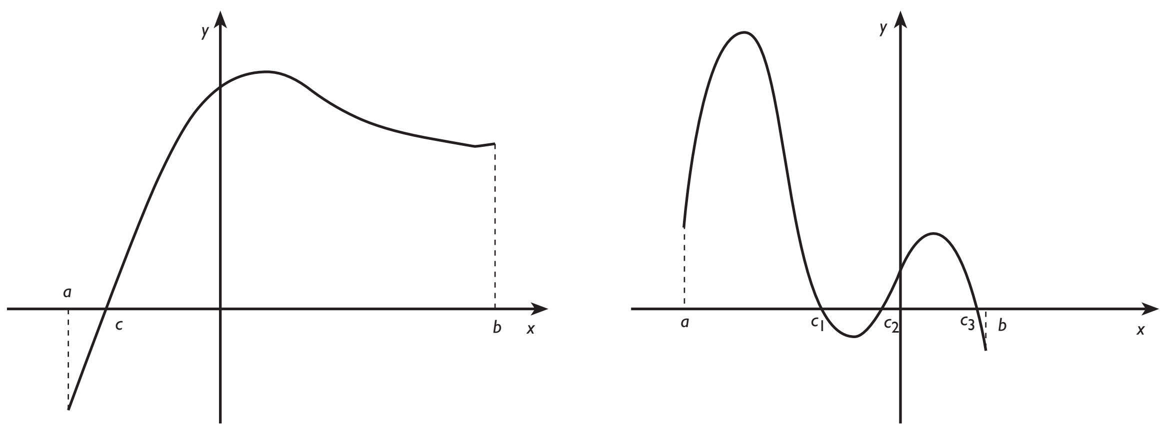


Şekil 5.19

Sürekli fonksiyonlar için bu özellik **ara değer teoremi** olarak bilinir. Şekildeki grafiğe göre $f(x_0) = f(x_1) = c$ dir.

Sonuç

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer $f(a) \,.\, f(b) < 0$ ise en az bir $c \in (a, b)$ için $f(c) = 0$ dır. Yani f sürekli fonksiyonu $[a, b]$ aralığının uçlarında farklı işaretli değerler alıyorsa, $f(x) = 0$ denkleminin (a, b) aralığında en az bir kökü vardır.



Şekil 5.20

Yukarıdaki grafiklerden açıkça görüldüğü gibi, $f(a)$ ile $f(b)$ değerleri farklı işaretli olduğundan $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ noktalarından birisi x-ekseninin altında iken diğeri x-ekseninin üstündedir. Fonksiyon sürekli olduğundan grafiği kalem kaldırılmadan çizilecektir, dolayısıyla negatif bölgeden pozitif bölgeye veya pozitif bölgeden negatif bölgeye geçerken grafik en az bir noktada x-eksenini kesmek zorundadır. Bu noktanın apsisi ise $f(x) = 0$ denkleminin köküdür.

Bu sonuç yardımıyla bazı denklemlerin köklerini araştırabiliriz.

ÖRNEK 24

$3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$ ***denkleminin*** $[0, 2]$ ***aralığında kökü var mıdır?***

ÇÖZÜM

$f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ fonksiyonunu gözönüne alalım. f polinom fonksiyon olduğundan bu aralıkta süreklidir. $f(0) = -1$, $f(2) = 11$ olduğundan $f(0) \, . \, f(2) < 0$ dır, dolayısıyla en az bir $c \in (0, 2)$ için $f(c) = 0$ dır. Bu nedenle denklemin bu aralıkta en az bir kökü vardır.

Yukarıdaki özelliklerde, fonksiyonun tanım kümesi kapalı aralık değilse veya fonksiyon sürekli değilse, genel olarak bu özellikler doğru değildir.

SIRA SİZDE 4

Aşağıdaki fonksiyonların $x = 1$ noktasında sürekli olup olmadıklarını araştırınız.

1) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \, , & x < 1 \text{ ise} \\ 0 \, , & x = 1 \text{ ise} \\ x + 1 \, , & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

2) $h(x) = \dfrac{|x - 1|}{x + 1}$

3) $k(x) = \sqrt{x+1}$

4) $m(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

Niels Abel (1802 - 1829)

Deha ve Yoksulluk.

Abel ,1824 de derecesi beşten büyük polinom denklemler için genel bir çözüm verilemeyeceğini kanıtlamıştır. Yoksul bir hayat yaşamış ve yakalandığı bir hastalık sonucunda 27 yaşında ölmüştür. Ünlü analizci Weierstrass öğrencilerine Abel'i okuyunuz tavsiyesinde bulunduktan sonra onun için şunları söylemiştir: *"Meğer Abel, ne mutlu adammış ki, fikirleri sonsuza kadar yaşayacak ve onların matematik bilimine çok olumlu etkileri olacaktır."*

"Tarih gösteriyor ki, bütün pozitif ilimlerin ortak kaynağı olan matematik kültürünü himaye eden hükümdarlar aynı zamanda devirleri en parlak olanlar ve zaferleri en uzun sürenlerdir."

Michel CHASLES

Kendimizi Sınayalım

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 4x}{x - 4}$ değeri nedir?

a. $-\infty$
b. 0
c. 1
d. 4
e. ∞

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5}$ değeri nedir?

a. $-\dfrac{3}{5}$
b. 0
c. $\dfrac{1}{2}$
d. 2
e. Yoktur

3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x\,|x| + 1}{x + 1}$ değeri nedir?

a. -2
b. -1
c. 1
d. 2
e. Yoktur

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - x^2 - x^3}{3 + x^2}$ değeri nedir?

a. $-\infty$
b. $\dfrac{1}{3}$
c. 0
d. $-\dfrac{1}{3}$
e. ∞

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - x\right)$ değeri nedir?

a. $-\infty$
b. 0
c. $\dfrac{1}{5}$
d. $\sqrt{2}$
e. ∞

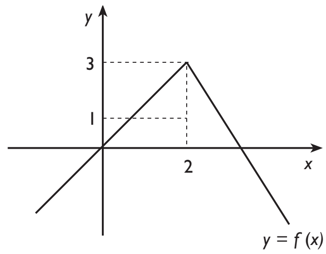
6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x}{(x - 1)^2}$ değeri nedir?

a. $-\infty$
b. -2
c. 0
d. 2
e. ∞

7. $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 4x - 2}$ değeri nedir?

a. -2
b. $\sqrt[3]{6}$
c. $\sqrt[3]{-2}$
d. 0
e. Yoktur

8. Yanda grafiği verilen f fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ değeri nedir?



a. 0
b. 1
c. 2
d. 3
e. Yoktur

9. $f(x) = 2x^2 - ax + 4$ fonksiyonu $x = -1$ noktasında sürekli ve $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 10$ olduğuna göre a kaçtır?

a. -4
b. -1
c. 0
d. 4
e. 10

10. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - ax}{2x + 5} = \dfrac{2}{3}$ olduğuna göre, a kaçtır?

a. 2
b. $\dfrac{1}{2}$
c. 0
d. $-\dfrac{1}{2}$
e. -1

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$ değeri nedir?

a. -2
b. 0
c. $\dfrac{1}{4}$
d. 2
e. ∞

12. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + 3}{x^2 + 3x}$ değeri nedir?

a. -1
b. 0
c. 1
d. 3
e. ∞

Biraz Daha Düşünelim

1. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{|x+2|}{x+2}$ değeri nedir?

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+4x-3}+x\right)$ değeri nedir?

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x\sqrt{x}+5}{3x^2+7}$ değeri nedir?

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{(x-1)^2}$ değeri nedir?