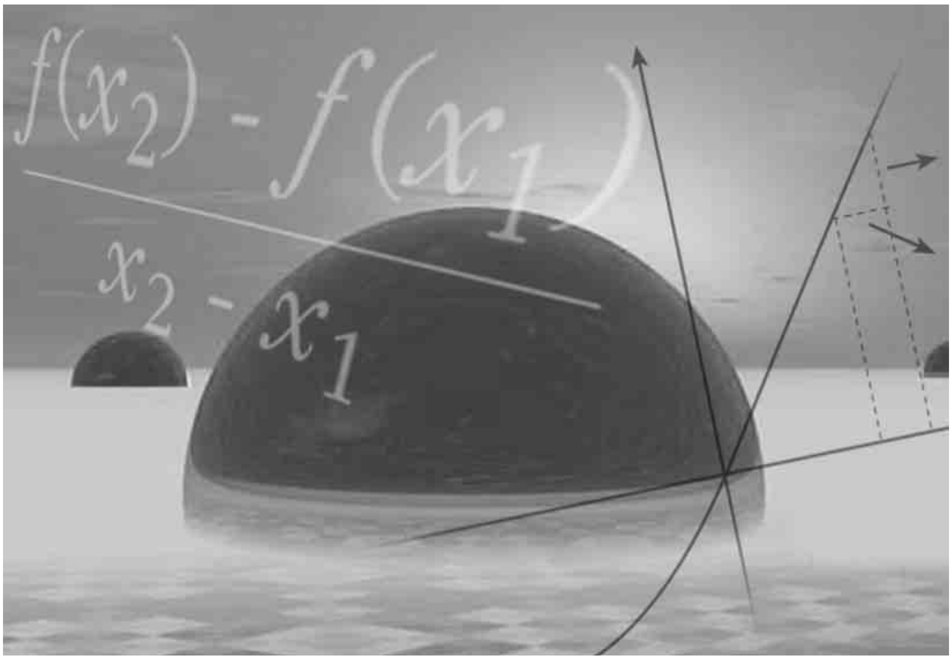
6

Türev Kavramı



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *bir fonksiyonun, bir noktadaki değişme hızının fonksiyonun, o noktadaki türevi olduğunu anlayacak,*
- *çeşitli tipteki fonksiyonların türevlerini bulabilecek,*
- *fonksiyonun bir noktadaki değerini, bu noktaya yakın uygun bir noktadaki teğeti yardımıyla bulacak,*
- *türev fonksiyonunun da türevlerini bulabileceksiniz.*

İçindekiler

- *Giriş*
- *Türev Kavramı*
- *Türev Kuralları*
- *Teğet Denklemi*
- *Yüksek Mertebeden Türevler*

DİKKAT

- ***Önce limit konusunu gözden geçiriniz.***
- ***Türev kurallarını çok örnek çözerek öğrenmeye çalışınız.***
- ***Türevin iktisadi uygulamalarının anlamlarını anlamaya çalışınız.***
- ***Çözümleri size bırakılmış soruları mutlaka çözünüz.***

Giriş

Bu ünitede türev kavramını, türev kurallarını ve türevin bazı uygulamalarını inceleyeceğiz. İncelememizde temel özellikleri örneklerle açıklayacak, ayrıntılı kanıtlara girmeyeceğiz.

Türev kavramı, fizikte hareketli bir cismin anlık hızının bulunmasıyla, matematikte ise bir fonksiyonun grafiği olan eğrinin bir noktadaki teğetinin eğiminin bulunması problemlerinden doğmuştur. Bugün ise türev, matematikle beraber fizik, kimya, mühendislik ve ekonomi gibi uygulamalı bilimlerin hepsinde pek çok problemin çözümünü kolaylaştıran, bu nedenle büyük önem taşıyan bir kavramdır. Örneğin, bir malın toplam maliyet fonksiyonunu biliyorsak hangi üretim miktarında maliyetin en düşük düzeyde olacağını veya herhangi bir üretim miktarında maliyetin değişim hızını yani maliyetin hangi hızla artacağını veya azalacağını, benzer şekilde bir malın kâr fonksiyonunu bildiğimizde hangi satış miktarında kârın en yüksek olacağını, herhangi bir satış miktarında kârın hangi hızla artacağını veya azalacağını türev yardımıyla bulabilmekteyiz.

Yukarıdaki örnekler ve bunlara benzer problemlerde, birbirine bağlı iki değişken vardır ve bu değişkenlerden birisindeki bir değişiklik nedeniyle, diğerinde meydana gelen değişme söz konusudur. Bu tür problemlerde, değişme miktarından daha çok, değişmenin hızı önem taşımaktadır. Örneğin günümüzde benzin fiyatı zamanla değişmektedir ancak, benzin fiyatının bir ayda 100 000 lira artması ile bir yılda 100 000 lira artması arasında çok büyük fark vardır. Bu nedenle önemli olan değişikliğin hangi miktarda olduğu değil, hangi oranda olduğudur. Bu örnekle vurgulamaya çalıştığımız kavram, matematik anlamda bir fonksiyonun bir noktadaki anlık (değişme) hızıdır.

Bir fonksiyonun anlık hızına geçmeden önce ortalama hızını bir örnekle açıklayalım.

x mal miktarını göstermek üzere bir malın, milyon TL cinsinden toplam maliyet fonksiyonu

$$y = C(x) = 5000 + 100x - \frac{x^2}{4} \quad , \quad 0 \leq x \leq 300$$

olsun. Bu toplam maliyet fonksiyonuna göre 100 birim ve 110 birim malın maliyeti,

C (100) = 5000 + 100 . 100 - 2500 = 12,5 Milyar TL,

C (110) = 5000 + 100 . 110 - 3025 = 12,975 Milyar TL

dir.

Bu malın $[100,\ 110]$ *aralığında ortalama maliyeti,*

$$\frac{C(110) - C(100)}{10} = 47{,}5 \text{ Milyon TL / mal birimi}$$

dir. İşte bu değere C *toplam maliyet fonksiyonunun* $[100,\ 110]$ *aralığındaki* ***ortalama hızı*** *diyoruz.*

Genel olarak, bir $y = f(x)$ *fonksiyonunda* x *bağımsız değişkeni bir* x_1 *noktasından* x_2 *noktasına (*$x_1 < x_2$ *olmak zorunda değildir) değiştiğinde fonksiyon değerlerinde meydana gelen değişiklik miktarı* $f(x_2) - f(x_1)$ *dir. Bu durumda*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

oranına fonksiyonun $[x_1,\ x_2]$ *aralığındaki ortalama hızı denir. Burada eğer* $x_2 < x_1$ *ise* $[x_2,\ x_1]$ *aralığındaki ortalama hızdan söz etmeliyiz.*

Şimdi de anlık hızı bir örnekle açıklayalım. Anlık (değişme) hızını yukarıdaki toplam maliyet fonksiyonu üzerinde açıklayabilirdik. Bunun için, uzunluğu birim uzunluktan çok daha küçük aralıklar üzerindeki ortalama hızlarından söz etmemiz gerekmektedir. Bunun matematik açısından hiçbir sakıncası olmamasına karşılık çok küçük kesirli miktarda mal miktarlarından söz etmemiz size anlamlı gelmeyebilir. Bunun yerine kavramı, ilk öğrenenler için daha anlaşılabilir hale getireceği inancıyla, hareketli bir cismin anlık hızının bulunması problemiyle açıklamaya çalışacağız. Bu arada şunu da ifade edelim ki bazı ekonomik problemler tamamen pozitif tam sayılarla ilgili olabilir. Dolayısıyla bu problemlerle ilgili fonksiyonlar da pozitif tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı olur. Bu fonksiyonların özellikleri incelenirken bu fonksiyonlar yerine bunların gerçel sayılar kümesinin uygun bir alt kümesine genişletilmişleri alınarak inceleme yapılır. Şimdi anlık hız konusunu açıklayalım.

Bir doğru üzerinde hareket eden bir cismin aldığı yol, zamanın fonksiyonu olarak, t saniye (sn), s metre (m) olmak üzere,

$s = s(t) = 20t + 3t^2$

olsun.

Bu hareketlinin başlangıçtan ($t = 0$ *anından) itibaren ilk 2 saniyede aldığı yol ,* $s(2) = 20\ .\ 2 + 3\ .\ 2^2 = 52$ *m, ilk 10 saniyede aldığı yol,* $s(10) = 20\ .\ 10 + 3\ .\ 10^2 = 500$ *m. dir.*

Bu hareketlinin 2' inci saniye ile 10' ncu saniye arasında aldığı yol $s(10) - s(2) = 500 - 52 = 448$ *m. dir. Buna göre, s yol fonksiyonunun diğer bir deyişle hareketlinin* $[2,\ 10]$ *aralığındaki ortalama hızı,*

$$\frac{s(10) - s(2)}{10 - 2} = \frac{500 - 52}{8} = 56 \text{ m/sn}$$

dir. Aynı cismin $[2,\ 3]$ *aralığındaki ortalama hızı,*

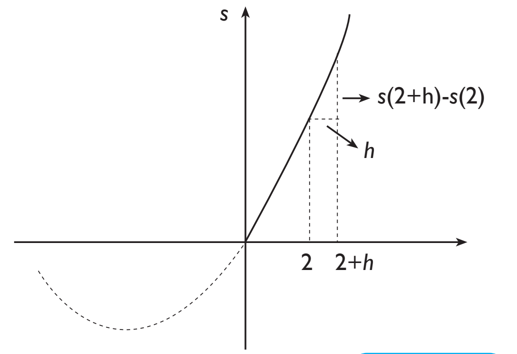
$$\frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{87 - 52}{1} = 35 \text{ m/sn} \ ,$$

[2, 2,5] aralığındaki ortalama hızı ise,

$$\frac{s(2{,}5) - s(2)}{2{,}5 - 2} = \frac{68{,}75 - 52}{0{,}5} = 33{,}5 \ \ m/sn$$

dir. Şimdi bu cismin tam 2' inci saniyede radara girdiğini düşünelim. Acaba bu anda yani tam 2-inci saniyede cismin hızı nedir?

Bu soruya cevap vermek için ortalama hızdan yararlanalım. Zamana $t = 2$ anından itibaren h ile gösterdiğimiz (küçük) bir artış verelim ve [2, 2 + h] aralığındaki ortalama hızı bulalım.



Şekil 6.1

$$\begin{aligned} s(2 + h) &= 20\,(2 + h) + 3\,(2 + h)^2 \\ &= 40 + 20 \,.\, h + 12 + 12h + 3h^2 \\ &= 52 + 32 \,.\, h + 3h^2 \end{aligned}$$

$s(2) = 52$ m olduğundan

$$\frac{s(2 + h) - s(2)}{(2 + h) - 2} = \frac{52 + 32 \,.\, h + 3 \,.\, h^2 - 52}{h} = 32 + 3h \ \ m/sn$$

dir.

Buna göre s fonksiyonunun [2, 2 + h] aralığındaki ortalama hızı $32 + 3h$ m/sn dir. Bu hızın $h \to 0$ için (varsa) limitini, hareketlinin $t = 2$ anındaki hızı olarak almak oldukça akla yakın görünmektedir. İşte, varlığı halinde, bu limit değere cismin $t = 2$ anındaki ***anlık (değişme) hızı*** *veya* kısaca ***anlık hızı*** *denir. Bu durumda $t = 2$ anındaki anlık hız,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(2 + h) - s(2)}{(2 + h) - 2} = \lim_{h \to 0} \left(32 + 3 \,.\, h\right) = 32 \ \ m/sn$$

dir.

Bu örnekte anlık hız olan bu limit değer, benzer problemlerde teğet eğimi, marjinal maliyet, marjinal gelir gibi anlamlar taşır. Bu anlık (değişme) hızlarının genel adı ***türevdir.*** *Örneğin yukarıda bulduğumuz 32 değeri $s(t) = 20t + 3t^2$ fonksiyonunun $t = 2$ noktasındaki türevidir.*

Türevin kesin tanımını vermeden önce bir konuya açıklık getirelim. Uygulamada karşılaşılan fonksiyonların tanım kümeleri genellikle bir aralıktır. Bazı özel durumlarda da sonlu tane aralığın ayrık birleşimi biçimindedir. Bu nedenle, tanım kümesi bir aralık olan fonksiyonların türevlerini inceleleyeceğiz.

TÜREV KAVRAMI

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in (a, b)$ verilsin. $x \neq x_0$ ve $x \in [a, b]$ olmak üzere

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

oranına f fonksiyonunun $[x_0, x]$ (veya $[x, x_0]$) aralığında ortalama hızı, $x \to x_0$ için ortalama hızın varsa limitine de f fonksiyonunun x_0 noktasındaki **türevi** denir ve

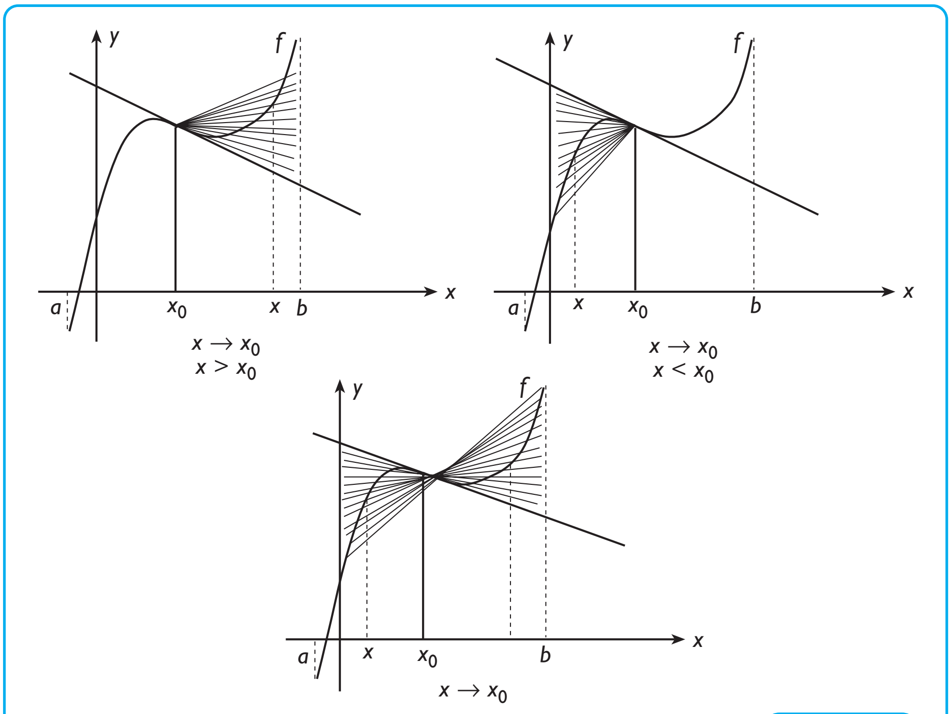
$$f'(x_0) \quad , \quad \frac{df(x_0)}{dx} \quad , \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$$

biçiminde gösterilir. Buna göre,

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

dir.

Eğer $f'(x_0)$ varsa, f fonksiyonuna **x_0 noktasında türevlenebilir fonksiyon** denir.



Şekil 6.2

Yandaki şekilde, x in x_0 a yaklaşması durumunda eğri üzerindeki x ve x_0 apsisli noktalardan geçen kesenlerin hareketlerini inceleyiniz. Yukarıdaki limitin varlığı halinde bu kesenlerin belli bir doğruya "yaklaştığını" görmeye çalışınız. Bu doğruya teğet dediğimizi hatırlayınız.

Türev tanımında x_0 noktasını $[a, b]$ aralığının bir iç noktası almıştık. $[a, b]$ aralığının uç noktalarında türev şu şekilde tanımlanır.

Eğer $x_0 = a$ ise x bağımsız değişkeninin a ya, a dan küçük değerlerle (soldan) yaklaşması mümkün olmadığından

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

sağdan limiti varsa, bu limite f fonksiyonun a noktasındaki türevi diyeceğiz. Benzer şekilde

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

soldan limiti varsa, bu limit değere de f fonksiyonunun b noktasındaki türevi diyeceğiz.
f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığının her noktasında türevi varsa, bu durumda f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığı üzerinde türevlenebilir fonksiyondur veya kısaca türevlenebilir fonksiyondur denir.

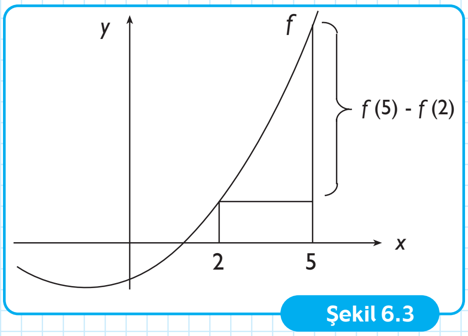
ÖRNEK 1 ***$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 4$ fonksiyonunun $[2, 5]$ aralığında ortalama hızını ve $x = 2$ noktasındaki türevini bulalım.***

ÇÖZÜM

$f(2) = 2^2 + 3 \,.\, 2 - 4 = 6$
$f(5) = 5^2 + 3 \,.\, 5 - 4 = 36$

$$\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{36 - 6}{3} = 10$$

Buna göre fonksiyonun $[2, 5]$ aralığında ortalama hızı 10 dur.
Şimdi f fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki türevini araştıralım:



Şekil 6.3

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 4 - \left(2^2 + 3 \,.\, 2 - 4\right)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 5)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x + 5) = 7$$

O halde $f'(2) = 7$ dir.

Bağımsız değişken x_0 dan x e değiştiğinde; değişme miktarı $x - x_0$ dır. Bu değer genellikle Δx (delta x) ile gösterilir. $x > x_0$ ise $\Delta x > 0$, $x < x_0$ ise $\Delta x < 0$ olacağı açıktır. Her iki durumda da Δx e x in artma miktarı denir.

$x - x_0 = \Delta x$ ise $x = x_0 + \Delta x$ ve $x \to x_0$ için $\Delta x \to 0$ olacağından varlığı halinde $f'(x_0)$ türevi şu şekilde de tanımlanabilir:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Burada, $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ dersek,

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

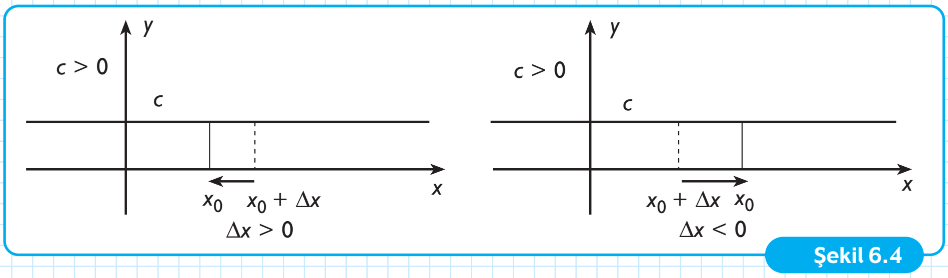
olur.

Buna göre türev, bağımsız değişkene verilen bir artmaya karşılık, fonksiyonun aldığı artmanın, değişkenin aldığı artmaya oranının, bağımsız değişkene verilen artmanın sıfıra yaklaşması halinde varsa limitidir. Yani türev, x bağımsız değişkenine verilen Δx artmasına karşılık fonksiyonun aldığı artma Δy olmak üzere, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ oranının $\Delta x \to 0$ için varsa limitidir.

ÖRNEK 2

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ sabit fonksiyonunun bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında türevini araştıralım.

ÇÖZÜM



Şekil 6.4

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

olduğundan $f'(x_0) = 0$ bulunur. Burada x_0 keyfi seçildiğinden her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = 0$ dır diyebiliriz.

$f(x) = c$ ise her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = 0$ dır. Sabit fonksiyonun her noktada türevi vardır ve sıfırdır.

Sabit fonksiyonun her noktada türevi vardır ve sıfırdır.

ÖRNEK 3

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ birim fonksiyonunun bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında varsa türevini bulalım.

ÇÖZÜM

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x) - x_0 = \Delta x$ olduğundan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 ,$$

$f'(x_0) = 1$ bulunur. Burada da x_0 keyfi seçildiğinden her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = 1$ dir.

$f(x) = x$ birim fonksiyonunun her noktada türevi vardır ve 1 e eşittir.

$f(x) = x$ birim fonksiyonunun her noktada türevi vardır ve 1 e eşittir.

ÖRNEK 4

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında varsa türevini bulalım.

ÇÖZÜM

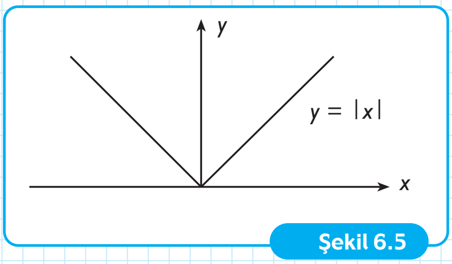
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} ,$$

burada $\Delta x > 0$ ise $|\Delta x| = \Delta x$, $\Delta x < 0$ ise $|\Delta x| = -\Delta x$ olduğundan

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

dir. Buna göre $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$



Şekil 6.5

limiti yoktur. Dolayısıyla $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevi yoktur.

DİKKAT

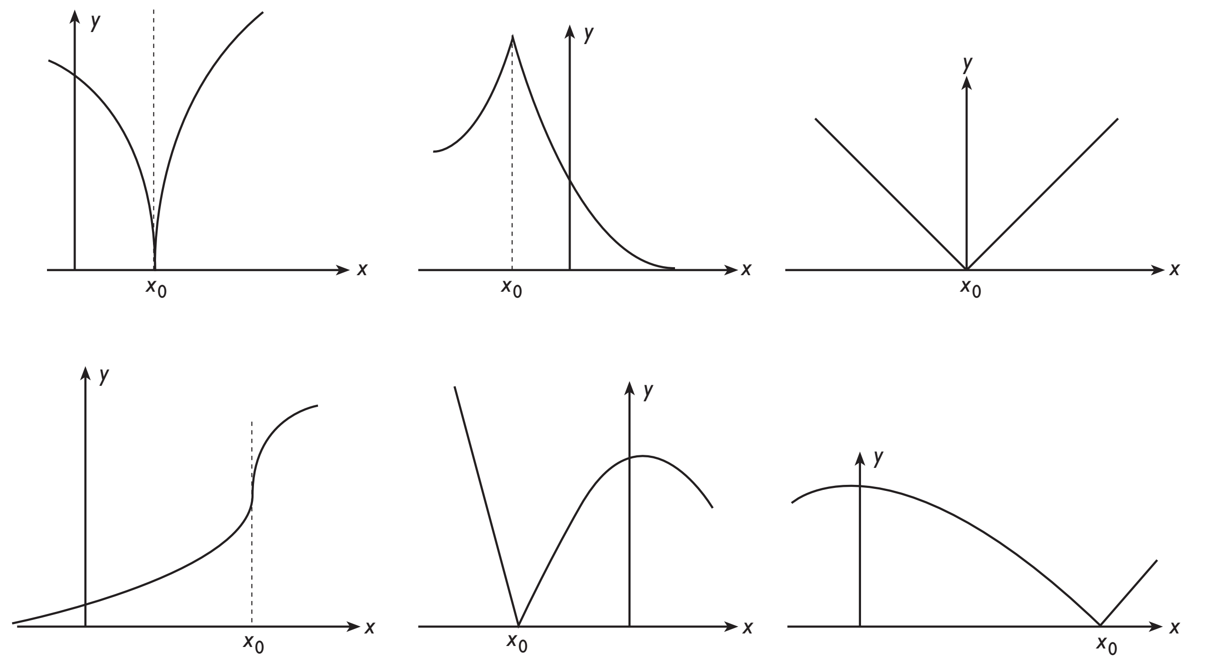
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = -2$ noktasındaki türevinin -1, $x = 3$ noktasındaki türevinin 1 olduğunu gösteriniz.

$f(x) = |x|$ fonksiyonunun sadece $x = 0$ noktasında türevi yoktur. Bunun dışında her noktada türevi vardır. Fonksiyonun grafiğine dikkat ederseniz (0, 0) noktası bir "köşe" noktadır.

Bir fonksiyonun bir noktada türevlenebilir olmasıyla bu noktadaki sürekliliği arasında yakın bir ilişki vardır.

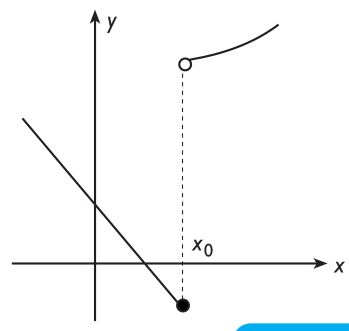
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $x_0 \in [a, b]$ noktasında türevi varsa, f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. Ancak bunun karşıtı her zaman doğru değildir. Bir fonksiyon bir noktada sürekli olduğu halde bu noktada türevi olmayabilir. Örneğin $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreklidir. Yukarıda gördüğümüz gibi bu noktada türevi yoktur.

Aşağıdaki grafiklerde verilen x_0 noktalarında fonksiyonların türevleri yoktur. Bu noktalarda bazı fonksiyonların sürekli olmadığına, bazılarında da grafiğin çeşitli biçimlerde "uç" veya "köşe" oluşturduğuna dikkat ediniz.



Şekil 6.6

Bir fonksiyon bir noktada sürekli değilse, bu noktada türevi yoktur.



Şekil 6.7

ÖRNEK 5

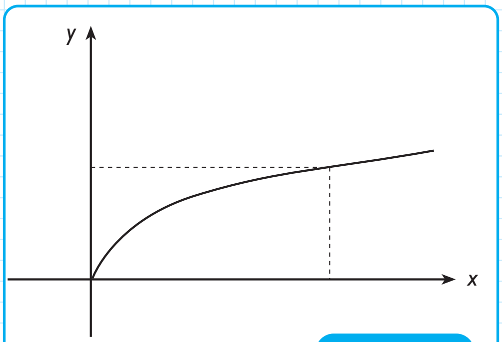
$f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında varsa türevini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = \infty$$

burada $\Delta x > 0$ olduğundan limit ∞ olur. Bu limit sonlu bir değer olmadığından $x = 0$ da türev yoktur. Bununla beraber bu limitin ∞ olması bu noktada, yandaki grafikte görüldüğü gibi, düşey bir teğetin varlığını ifade eder.



Şekil 6.8

SIRA SİZDE 1

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$ fonksiyonunun bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasındaki türevini bulunuz.

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4$ fonksiyonunun $x = 0$ ve $x = -1$ noktalarında türevini bulunuz.

TÜREV KURALLARI

Yukarıdaki örneklerden kısmen de olsa gördüğümüz gibi bir fonksiyonun türevini, türevin tanımını kullanarak hesaplamak bazen uzun ve yorucu işlemler gerektirebilir. Bu konuda türev kuralları diyebileceğimiz bazı özellikler, bize yardımcı olmaktadır.

$$f: [a, b] \to \mathbb{R}, \quad g: [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonlarının bir $x_0 \in [a, b]$ noktasında türevleri olsun. Bu durumda,

Kural 1: $f + g: [a, b] \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında türevi vardır ve

$$\boldsymbol{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$$

dır.

Türevlenebilir iki fonksiyonun toplamının türevi, fonksiyonların türevlerinin toplamına eşittir.

ÖRNEK 6 ***h*** *: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x + 10$* ***fonksiyonunun bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında türevini bulalım.***

ÇÖZÜM

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x + 10$ fonksiyonunu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ birim fonksiyonu ile $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 10$ sabit fonksiyonunun toplamı olarak düşünebiliriz. Birim fonksiyonun ve sabit fonksiyonun her noktada türevi olduğundan h fonksiyonunun her noktada türevi vardır.

$h(x) = f(x) + g(x)$ olduğundan $h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ dır.

$f'(x_0) = (x)' = 1$, $g'(x_0) = (10)' = 0$ olduğundan

$h'(x_0) = 1 + 0 = 1$ dir.

O halde $f(x) = x + 10$ ise her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = 1$ dir.

Kural 2: $f \,.\, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında türevi vardır ve

$$\boldsymbol{(f \,.\, g)'(x_0) = f'(x_0) \,.\, g(x_0) + g'(x_0) \,.\, f(x_0)}$$

dır.

Dikkat ederseniz, çarpımın türevi türevler çarpımına **eşit değildir.**

ÖRNEK 7 ***h*** *: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$* ***fonksiyonunun bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında türevini bulalım.***

ÇÖZÜM

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu $f(x) = x$ olmak üzere, $h(x) = f(x) \,.\, f(x)$ biçiminde düşünülebilir. Buna göre,

$h'(x_0) = f'(x_0) \,.\, f(x_0) + f(x_0) \,.\, f'(x_0)$

dır. $f'(x_0) = 1$ olduğundan

$h'(x_0) = 1 \,.\, x_0 + x_0 \,.\, 1 = 2x_0$

dır. x_0 keyfi olduğundan $f(x) = x^2$ ise her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = 2x$ tir diyebiliriz. Kural 2 de, özel olarak $g(x) = c$ sabit fonksiyonu alınırsa, sabit fonksiyonun türevi sıfır olduğundan

$$\boldsymbol{(c f)'(x_0) = c f'(x_0)}$$

olur. Yani bir fonksiyonun bir sabit ile çarpımının türevi, fonksiyonun türevinin bu sabit ile çarpımına eşittir.

Bir fonksiyonun bir sabit ile çarpımının türevi, fonksiyonun türevinin bu sabit ile çarpımına eşittir.

$f(x) = 8x + 13$ fonksiyonunun türevini türev kuralları yardımıyla kolayca bulabiliriz.

$$f(x) = 8x + 13 \text{ ise her } x \in \mathbb{R} \text{ için } f'(x) = (8x)' + (13)' = 8 \,.\, (x)' + 0 = 8 \,.\, 1 = 8$$

Bu durumda $y = f(x) = 8x + 13$ dersek $\dfrac{dy}{dx} = 8$ veya $y' = 8$ yazılır.

ÖRNEK 8

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$ fonksiyonunun bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında türevini bulalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = 3x^2 + 6x - 7$ ise

$$f'(x) = (3x^2)' + (6x)' + (-7)' = 3(x^2)' + 6(x)' + 0$$
$$= 3 \cdot 2x + 6 \cdot 1 = 6x + 6$$

$y = 3x^2 + 6x - 7$ dersek $\dfrac{dy}{dx} = 6x + 6$ veya $y' = 6x + 6$ veya

$f'(x) = 6x + 6$ yazılır.

SIRA SİZDE 2

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

1. $f(x) = -4x + \sqrt{2}$ **2.** $g(x) = x^2 + 3x - 1$

3. $k(x) = \sqrt{3}\,x - \dfrac{1}{2}$ **4.** $l(x) = \dfrac{x}{5} - x^2$

Kural 3: $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, olmak üzere

$$c_1 f + c_2 g : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad (c_1 f + c_2 g)(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$$

fonksiyonunun x_0 noktasında türevi vardır ve

$$\boldsymbol{(c_1 f + c_2 g)'(x_0) = c_1 f'(x_0) + c_2 g'(x_0)}$$

dır. Burada özel olarak $c_0 = 1$, $c_0 = -1$ alınırsa

$$\boldsymbol{(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)}$$

sonucu elde edilir.

Farkın türevi türevler farkına eşittir.

Kural 4: Her $x \in [a, b]$ için $g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{f}{g} : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

fonksiyonunun x_0 noktasında türevi vardır ve

$$\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - g'(x_0)\,f(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

dır. Özel olarak $f(x) = 1$ sabit fonksiyonu olursa,

$$\boldsymbol{\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

sonucu elde edilir.

Bölümün türevi türevler bölümüne **eşit değildir**.

ÖRNEK 9

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+3}$

fonksiyonunun $x \in \mathbb{R}$ noktasında türevini bulalım.

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{(2x+1)'(x^2+3) - (x^2+3)'(2x+1)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{2 \,.\, (x^2+3) - 2x(2x+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^2+6-4x^2-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}$$

$y = \dfrac{2x+1}{x^2+3}$ dersek, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}$

olur.

Kural 5: $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $x \in (0, \infty)$ noktasındaki türevi

$$f'(x) = r\,x^{r-1}$$

dir.

$\boldsymbol{f(x) = x^r}$ **ise** $\boldsymbol{f'(x) = rx^{r-1}}$, $\boldsymbol{x > 0}$, $\boldsymbol{r \in \mathbb{R}}$

ÖRNEK 10

$f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ***ise*** $f'(x) = ?$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}\,x^{1/3-1} = \frac{1}{3}\,x^{-2/3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

ÖRNEK 11

$f(x) = \dfrac{3x^2+5}{2x+7}$ ***ise*** $f'(-1) = ?$

ÇÖZÜM

$f'(-1)$ sayısını bulmak için önce $f'(x)$ türevini bulup daha sonra x yerine -1 yazmak yeterlidir.

$$f'(x) = \frac{6x\,(2x+7) - 2\,.\,(3x^2+5)}{(2x+7)^2}$$

$$= \frac{12x^2 + 42x - 6x^2 - 10}{(2x+7)^2} = \frac{6x^2+42x-10}{(2x+7)^2},$$

$$f'(-1) = \frac{6\,(-1)^2 + 42\,.\,(-1) - 10}{(2\,(-1)+7)^2} = \frac{6-42-10}{5^2} = \frac{-46}{25}$$

ÖRNEK 12

$f(x) = \sqrt{x}\,(3x-1)$ ***ise*** $f'(x) = ?$

ÇÖZÜM

I. YOL

$$f'(x) = (\sqrt{x})'(3x-1) + (3x-1)'\sqrt{x}$$

$$= (x^{1/2})'(3x-1) + 3\,.\,\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-1/2}(3x-1) + 3\sqrt{x}$$

$$= \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}\,.\,x^{-1/2} + 3\sqrt{x} = \left(\frac{3}{2}+3\right)\sqrt{x} - \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

II. YOL

$$f(x) = \sqrt{x}\,(3x-1) = 3x\sqrt{x} - \sqrt{x} = 3x^{3/2} - x^{1/2}$$

yazabiliriz. Buna göre,

$$f'(x) = \frac{9}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$= \frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{\sqrt{x}}$$

bulunur.

Şimdi ünite girişinde ele aldığımız

$$C(x) = 5000 + 100x - \frac{x^2}{4}, \quad 0 \le x \le 300$$

toplam maliyet fonksiyonunun, çeşitli noktalardaki anlık hızlarını, diğer bir deyişle, türevlerini bulalım.

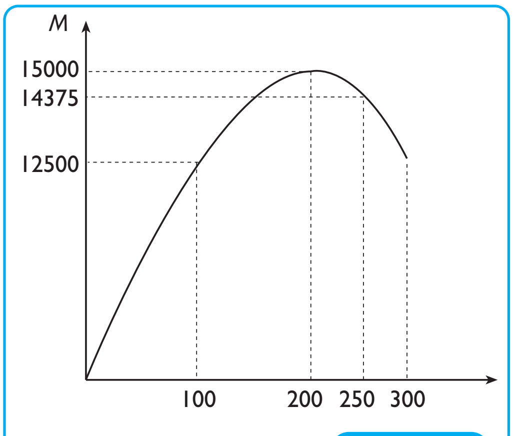
$$C'(x) = 100 - \frac{2x}{4} = 100 - \frac{x}{2}$$

dir.

$$C'(100) = 100 - \frac{100}{2} = 50 \text{ Milyon TL/Mal birimi,}$$

$$C'(250) = 100 - \frac{250}{2} = -25 \text{ Milyon TL/Mal birimi}$$

Dikkat ederseniz $C'(100)$ pozitif değer iken $C'(250)$ negatif bir değerdir. Bunun anlamı, 100 birimlik üretim miktarı civarında maliyet yaklaşık 50 Milyon TL/Mal Birimi hızla artarken, 250 birimlik üretim miktarı civarında maliyet yaklaşık 25 Milyon TL/Mal Birimi hızla azalacak demektir. Bu durumu fonksiyonun grafiğinden de görmek mümkündür.



Şekil 6.9

ÖRNEK 13

Bir firma x milyar TL reklam harcaması yaptığında

$N(x) = -2{,}8x^3 + 165x^2 - 580x + 1900, \quad 0 \leq x \leq 40$

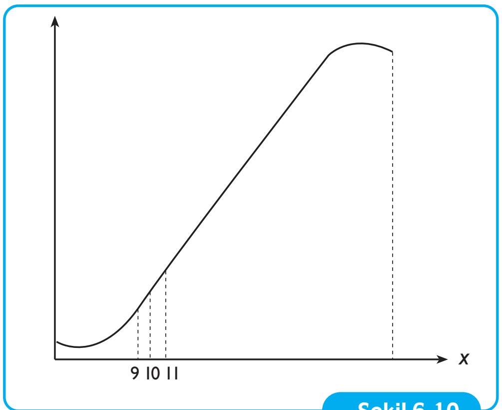
birim mal satacağını hesaplamıştır. Buna göre, x = 10 (milyar TL) noktasında satılacak mal miktarının anlık değişme hızını bulalım.

ÇÖZÜM

$x = 10$ noktasındaki anlık hız $N'(10)$ olduğundan $N'(10)$ sayısını bulmamız gerekmektedir. Bunun için önce $N'(x)$ i bulalım.

$$\begin{aligned} N'(x) &= -8{,}4x^2 + 330x - 580 \\ N'(10) &= -8{,}4 \,.\, 100 + 330 \,.\, 10 - 580 \\ &= -840 + 3300 - 580 \\ &= 1880 \end{aligned}$$

Buna göre, 10 milyar TL reklam harcaması yapıldığında satılacak mal miktarının artış hızı 1880 dir.



Şekil 6.10

Kural 6: $f : [a,\ b\,] \rightarrow \mathbb{R}$, $g :\ [c,\ d\,] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin ve $f(\,[a,\ b\,]\,) \subset [c,\ d\,]$ olsun. f fonksiyonunun $x_0 \in [a,\ b\,]$ noktasında, g fonksiyonunun $y_0 = f(x_0) \in [c,\ d\,]$ noktasında türevi varsa, bu durumda

$$gof : [a,\ b\,] \rightarrow \mathbb{R},\ \ (gof)\,(x) = g\,(\,f(x)\,)$$

bileşke fonksiyonunun x_0 noktasında türevi vardır ve

$$\boldsymbol{(gof\,)'\,(x_0) = g'\,(f\,(x_0)\,)\,.\,f'\,(x_0)}$$

dir. İşlem kolaylığı bakımından gof bileşke fonksiyonunda

$$y = (gof)\,(x) = g\,(f\,(x)\,) = g\,(u)\,,\quad u = f\,(x)$$

dersek yukarıdaki kural kısaca

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna **zincir kuralı** denir.

ÖRNEK 14

h *:* $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h\,(x) = (2x^2 - x + 1)^3$ ***fonksiyonunun*** $x_0 = 1$ ***noktasındaki türevini bulalım.***

ÇÖZÜM

h fonksiyonunu, $\mathbb{R}$ de tanımlı

$$u = f\,(x) = 2x^2 - x + 1 \quad \text{ve} \quad g\,(u) = u^3$$

fonksiyonlarının bileşkesi olarak düşünebiliriz. Buna göre,

$$y = h\,(x) = (gof)\,(x) = g\,(f(x)) = g\,(u) = u^3\,,\quad u = 2x^2 - x + 1$$

olur.

$$h'\,(x) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 3u^2\,.\,(4x-1) = 3\left(2x^2 - x + 1\right)^2\left(4x-1\right)$$

olur. Buradan

$$h'(1) = 3\,(2\,.\,1^2 - 1 + 1)^2\,(4\,.\,1 - 1) = 3\,.\,4\,.\,3 = 36$$

bulunur.

Zincir kuralı yardımıyla şu sonucu ifade edebiliriz.
$f : [a,\ b\,] \rightarrow \mathbb{R}^+$ türevi olan bir fonksiyon olmak üzere,

$$h : [a,\ b\,] \rightarrow \mathbb{R}\,,\quad h\,(x) = [\,f\,(x)\,]^r\,,\quad r \in \mathbb{R}$$

fonksiyonunun türevi

$$h'\,(x) = r\,[\,f\,(x)]^{(r-1)}\,.\,f'\,(x)$$

dir.

$$h(x) = [f(x)]^r \Rightarrow h'(x) = r[f(x)]^{r-1} . f'(x)$$

dir.

ÖRNEK 15

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4x^4 - 8x^2 + 8}$ fonksiyonu verilsin. $f'(-1) = ?$

ÇÖZÜM

$$f(x) = (4x^4 - 8x^2 + 8)^{1/2}$$

yazılabilir. Yukarıda verdiğimiz kurala göre,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(4x^4 - 8x^2 + 8\right)^{-1/2}\left(16x^3 - 16x\right)$$

$$f'(-1) = \frac{1}{2}\left(4 - 8 + 8\right)^{-1/2}\left(-16 + 16\right) = 0$$

bulunur.

Şimdi buraya kadar verdiğimiz türev kurallarını toplu halde görelim.

$$f(x) = c,\ c \in \mathbb{R} \text{ ise } f'(x) = 0$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(f.g)'(x) = f'(x) . g(x) + g'(x) . f(x)$$

$$(cf)'(x) = c\, f'(x),\ c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x) . f(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(fog)'(x) = \left[f(g(x))\right]' = f'\left(g(x)\right).\ g'(x)$$

$$\left(x^r\right)' = rx^{r-1},\ x > 0,\ r \in \mathbb{R}$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}},\ f(x) > 0$$

$$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{\left(f(x)\right)^{n-1}}},\ n \text{ çift ise } f(x) > 0$$

$$\left[\left(f(x)\right)^r\right]' = r\left(f(x)\right)^{r-1} .\ f'(x),\ f(x) > 0,\ r \in \mathbb{R}$$

ÖRNEK 16

$f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x-2}}$ ise $f'(6) = ?$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{(3x)'\sqrt{x-2} - \left(\sqrt{x-2}\right)' 3x}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{x-2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} \cdot 3x}{x-2}$$

$$= \frac{6(x-2) - 3x}{2 \cdot (x-2)\sqrt{x-2}} = \frac{3x-12}{2 \cdot (x-2)\sqrt{x-2}}$$

$$f'(6) = \frac{3 \cdot 6 - 12}{2 \cdot (6-2)\sqrt{6-2}} = \frac{6}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$$

ÖRNEK 17

$f(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3$ ise $f'(x) = ?$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \left(\frac{x}{x+1}\right)'$$

$$= 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3x^2}{(x+1)^4}$$

ÖRNEK 18

$f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-1}{2x+5}}$ ise $f'(x) = ?$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{3x-1}{2x+5}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{3x-1}{2x+5}}} = \frac{\dfrac{3(2x+5) - 2(3x-1)}{(2x+5)^2}}{2\sqrt{\dfrac{3x-1}{2x+5}}}$$

$$= \frac{\dfrac{17}{(2x+5)^2}}{2\sqrt{\dfrac{3x-1}{2x+5}}} = \frac{17}{2(2x+5)^{3/2}\sqrt{3x-1}}$$

$$f : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

fonksiyonu bire-bir, örten ve sürekli olsun. $x_0 \in [a, b]$ noktasında f fonksiyonunun türevi var ve $f'(x_0) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$$

ters fonksiyonunun $y_0 = f(x_0) \in [c, d]$ noktasında türevi vardır ve

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

dır.

Örneğin $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun bir $x_0 \in (0, \infty)$ noktasında türevi vardır ve $f'(x_0) = 2x_0 \neq 0$ dır.

Bu durumda,

$$f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \ , \ f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

fonksiyonunun $y_0 = f(x_0) = x_0^2$ noktasında türevi vardır ve

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$$

dır.

Bu sonucu $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ fonksiyonunun türevini alarak da bulabiliriz.

SIRA SİZDE 3

1. $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ ise $f'(4) = ?$

2. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$ ise $f'(-1) = ?$

3. $f(x) = (3 - 2x)^4$ ise $f'(1) = ?$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ ise $f'(x) = ?$

5. $f(x) = \sqrt[4]{x^3 + 2x + 19}$ ise $f'(-1) = ?$

6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$ ise $f'(-3) = ?$

7. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$ ise $f'(x) = ?$

8. $g(x) = \dfrac{x - 1}{x^{2/3}}$ ise $g'(8) = ?$

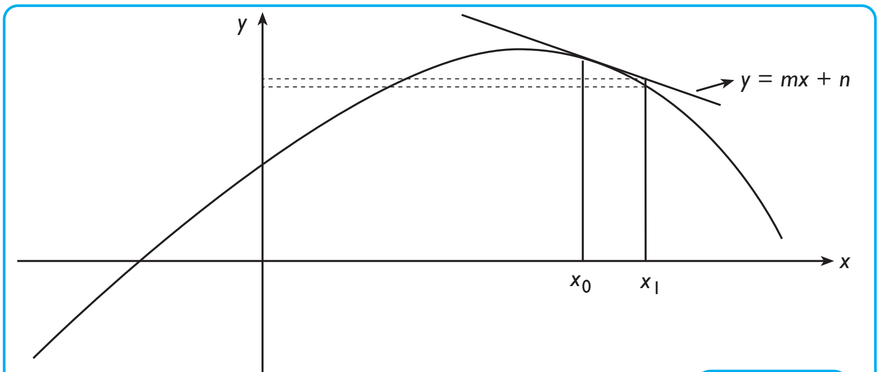
9. $k(x) = x\sqrt{x + 1}$ ise $k'(x) = ?$

10. $h(x) = \dfrac{4}{7}x^{7/4} - \dfrac{5}{3}x^{-3/5}$ ise $h'(1) = ?$

11. $m(x) = (x^{-3} - x^{-2} - 2)(x^3 + x^2 + 2)$ ise $m'(x) = ?$

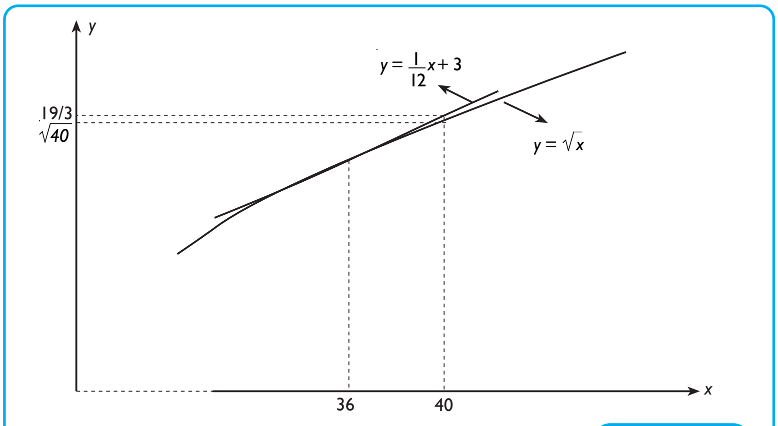
TEĞET DENKLEMİ

Bazı problemlerde karşımıza çıkan fonksiyonların ifadeleri oldukça karmaşık olabilir. Bunun sonucu olarak böyle fonksiyonlarla çalışmak da zorlaşır. Bu zorluğu aşmanın yollarından birisi bu karmaşık fonksiyon yerine, kabul edilebilir bir hatayla fonksiyona yakın değerler alan bir polinom fonksiyon almaktır. Böyle bir polinom fonksiyonun varlığı ve varlığı halinde şekli ile ilgili sorunun genel anlamda cevabı bu kitabın amacı dışındadır. Biz bir özel durumu burada ele alacağız. Bu özel durum, fonksiyonun x_1 gibi bir noktadaki değeri olarak, x_1 e yeteri kadar yakın, uygun bir x_0 noktasında eğrinin teğet doğrusu üzerinde x_1 apsisli noktanın ordinatının alınmasıdır.



Şekil 6.11

Biraz sonra göreceğimiz gibi, teğetin denklemi, birinci dereceden polinom fonksiyon (doğrusal fonksiyon) olduğundan, aranan değerin daha kolay bulunacağı açıktır. Örneğin $\sqrt{40}$ sayısı $y = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x_1 = 40$ noktasındaki değeri demektir. $y = \sqrt{x}$ eğrisinin $x_0 = 36$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemi (bu denklemi daha sonra bulacağız)



Şekil 6.12

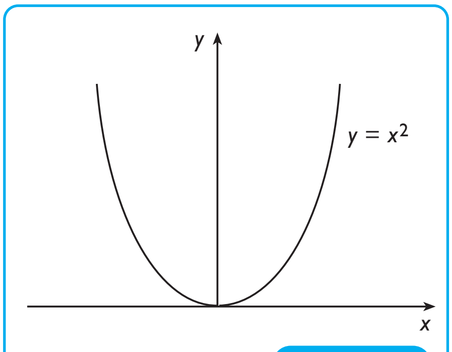
$y = \frac{1}{12}x + 3$ dür. İşte $\sqrt{40}$ sayısının bir yaklaşık değeri olarak

$$y = \frac{1}{12}40 + 3 = \frac{19}{3} = 6{,}333...$$

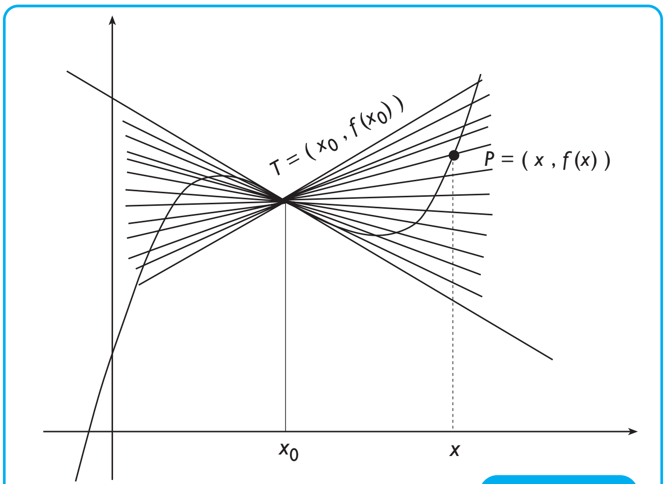
alabiliriz.

$\sqrt{40} \cong 6{,}333...$

Bu açıklama ve örneğe göre teğet denklemi oldukça yararlı görünmektedir. Ancak önce teğet nedir sorusuna cevap vermemiz gerekmektedir. Teğet deyince çoğumuz çemberin teğetini hatırlar ve eğriyi yalnız bir noktada kesen doğru olarak düşünürüz. Ancak bu düşünce her zaman doğru değildir. Örneğin; y - ekseni (x = 0 doğrusu) $y = x^2$ parabolünü tek noktada kesmesine karşılık, parabolün teğeti değildir.



Şekil 6.13



Şekil 6.14

Teğeti şu şekilde tanımlayabiliriz. Şekil 6.14te görüldüğü gibi $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği olan eğriyi ve bu eğri üzerinde sabit bir $T = (x_0\ ,\ f(x_0\ ))$ noktasını ve bu eğri üzerinde Tden farklı $P = (x, f(x\ ))$ noktasını alalım. Bu durumda TP keseninin eğimi

$$m_{TP} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

olur. P noktası eğri üzerinde T noktasına yaklaşırken (diğer bir deyişle $x \to x_0$, için) PT kesenleri belli bir limit konumuna yaklaşabilir, eğer m_{TP} eğimlerinin $x \to x_0$ için limiti varsa, yani

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti varsa, PT kesenleri belirli bir limit konuma yaklaşır. Bildiğiniz gibi bu limit f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevidir. İşte bu limit yani $f\,'(\mathrm{x}_0)$ türevi varsa, f fonksiyonunun x_0 noktasında teğeti vardır diyeceğiz. Buna göre teğeti şöyle tanımlayabiliriz.

$(x_0\ ,\ f(x_0))$ noktasından geçen ve eğimi $f\,'(x_0)$ *a* eşit olan doğruya, f fonksiyonunun $(x_0\ ,\ f(x_0))$ noktasındaki teğeti denir.

$(x_0\,,\,y_0)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi $y - y_0 = m\,(x - x_0)$ idi. Teğet için bu denklem de $y_0 = f(x_0)$, $m = f\,'(x_0)$ olduğundan teğetin denklemi,

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = f\,'(x_0)\,(x - x_0)}$$

olur.

Örneğin, $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiğinin, $x_0 = 36$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini bulalım. "Bu teğetin yukarıda sözünü ettiğimiz teğet olduğuna dikkat ediniz".

$f(x_0) = f(36) = \sqrt{36} = 6$, $f\,'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ olduğundan

$f\,'(36) = \dfrac{1}{2\sqrt{36}} = \dfrac{1}{12}$ dir. Buna göre,

$$y - 6 = \frac{1}{12}(x - 36)$$

$$y = \frac{1}{12}x - 3 + 6$$

$$y = \frac{1}{12}x + 3$$

bulunur.

SIRA SİZDE 4

1. $y = \sqrt{4 - x^2}$ eğrisinin $x = \sqrt{3}$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

2. $y = \dfrac{1}{x}$ eğrisinin $x = \dfrac{1}{2}$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Bir ekonomist için belirli bir miktar mal üretildiğinde bu malın toplam maliyetini bilmek kadar; herhangi bir üretim miktarında maliyetin değişim hızını bilmek de önemlidir.

Örneğin bir malın toplam maliyet fonksiyonu, x mal miktarı, $C(x)$ Milyon TL olmak üzere

$$C(x) = 0{,}2x + 10\sqrt{x} + 1000 \quad , \quad 0 \leq x \leq 100$$

olsun. Bu maldan 16 birim mal üretildikten sonraki 17-inci malın maliyeti,

$$\begin{aligned} C(17) - C(16) &= 0{,}2 \,.\, 17 + 10\sqrt{17} + 1000 - (0{,}2 \,.\, 16 + 10\sqrt{16} + 1000) \\ &\cong 0{,}2 + 10 \,.\, 4{,}123 - 4 \,.\, 10 \\ &\cong 1{,}43 \text{ Milyon TL} \end{aligned}$$

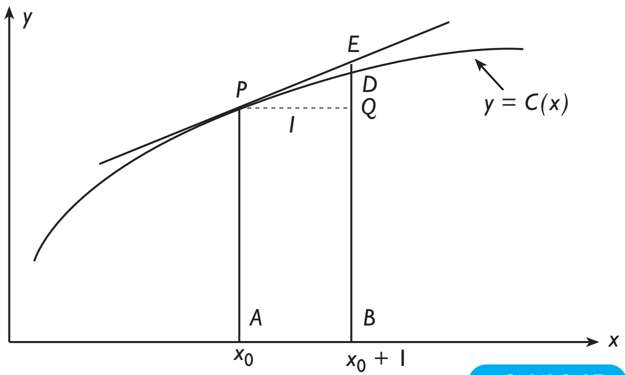
dir. Buna karşılık, 49 birim mal üretildikten sonraki 50-nci malın maliyeti

$$C(50) - C(49) = 0{,}2 \,.\, 50 + 10\sqrt{50} + 1000 - (0{,}2 \,.\, 49 + 10\sqrt{49} + 1000)$$
$$\cong 0{,}2 + 10 \,.\, 7{,}07 - 10 \,.\, 7$$
$$\cong 0{,}9 \text{ Milyon TL}$$

dir.

Gördüğünüz gibi maliyetin 16 noktasındaki ortalama artış hızıyla 49 noktasındaki ortalama artış hızı birbirinden farklıdır. Doğal olarak, bu noktalardaki anlık hızların da farklı olması beklenir. İşte toplam maliyet fonksiyonunun bir x_0 noktasındaki anlık (değişim) hızına, diğer bir deyişle x_0 noktasındaki türevine, bu malın x_0 noktasındaki **marjinal maliyeti** denir.

Marjinal maliyet, x_0 apsisli noktadaki teğetin eğimi olduğundan $(x_0 + 1)$ inci malın yaklaşık maliyetini ifade eder. Bu durumu aşağıdaki şekilden açıkça görebiliriz.



Şekil 6.15

Yukarıdaki şekle göre,

$PA = QB = C(x_0)$, (x_0 birim malın maliyeti)

$DB = C(x_0 + 1)$, ($x_0 + 1$ birim malın maliyeti)

$DQ = DB - QB = C(x_0 + 1) - C(x_0)$, (($x_0 + 1$)- inci malın maliyeti)

$QP = (x_0 + 1) - x_0 = 1$

$EQ = C'(x_0)$, (x_0 noktasındaki marjinal maliyet)

$C'(x_0) = EQ \cong DQ = C(x_0 + 1) - C(x_0)$

ÖRNEK 19

$C(x) = 0{,}2x + 10\sqrt{x} + 1000$, $0 \leq x \leq 100$ ***toplam maliyet fonksiyonunun $x = 16$ ve $x = 49$ noktalarında marjinal maliyetini bulalım.***

ÇÖZÜM

Marjinal maliyet, toplam maliyet fonksiyonunun türevi olduğundan $C'(16)$ ve $C'(49)$ değerlerini bulmamız gerekiyor.

$$C'(x) = 0{,}2 + \frac{10}{2\sqrt{x}} = 0{,}2 + \frac{5}{\sqrt{x}}$$

$$C'(16) = 0{,}2 + \frac{5}{\sqrt{16}} = 0{,}2 + \frac{5}{4} = 1{,}45$$

$$C'(49) = 0{,}2 + \frac{5}{\sqrt{49}} = 0{,}2 + \frac{5}{7} = 0{,}91$$

Gördüğünüz gibi $C'(16)$ değeri yukarıda bulduğunuz 17 -inci malın maliyetine, $C'(49)$ değeri de 50 'inci malın maliyetine yakın bir değerdir. Bu nedenle

$C'(16) \cong 17$ ' inci malın maliyeti
$C'(49) \cong 50$ ' inci malın maliyeti

diyebiliriz.

Bir malın gelir fonksiyonunun bir noktadaki türevine, bu malın bu noktadaki **marjinal geliri** denir. Bir x_0 noktasındaki marjinal gelir de $(x_0 + 1)$ -inci malın satışından elde edilen gelirin bir yaklaşık değerini ifade eder.

ÖRNEK 20

Bir malın gelir fonksiyonu x mal miktarı, R (x) Milyon TL olmak üzere

$$R(x) = 13x - \frac{x^2}{800} \quad , \quad 0 \le x \le 5000$$

dir. Bu malın $x = 1000$ noktasındaki marjinal gelirini bulalım.

ÇÖZÜM

$$R'(x) = 13 - \frac{x}{400}$$

$$R'(1000) = 13 - \frac{1000}{400} = 10,5$$

dir.

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde türevlenebilirse, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanan ve her $x \in [a, b]$ sayısını f fonksiyonunun x noktasındaki türevine gönderen fonksiyona f nin türev fonksiyonu denir ve f' ile gösterilir. Buna göre,

$$f' : [a, b] \to \mathbb{R} , \ x \to f'(x)$$

dir.

Eğer f' fonksiyonunun bir $x_0 \in [a, b]$ noktasında türevi varsa, bu türeve f fonksiyonunun x_0 noktasında **ikinci mertebeden türevi** denir ve

$$f''(x_0) \quad , \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x = x_0} \quad , \quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$$

biçiminde gösterilir.

f fonksiyonunun her $x \in [a, b]$ noktasında ikinci mertebeden türevi varsa,

$$f'' : [a , b] \to \mathbb{R} \quad , \quad x \to f''(x)$$

fonksiyonuna f nin ikinci mertebeden türev fonksiyonu denir. f'' fonksiyonunun bir $x_0 \in [a, b]$ noktasındaki türevine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki üçüncü mertebeden türevi denir ve

$$f'''(x_0) \quad , \quad \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3} \quad , \quad \left.\frac{d^3 y}{dx^3}\right|_{x = x_0}$$

biçiminde gösterilir.

Bu şekilde devam ederek $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere f fonksiyonunun n-inci mertebeden türevi tanımlanabilir. f fonksiyonunun bir x_0 noktasındaki n-inci mertebeden türevi

$$f^{(n)}(x_0) \quad , \quad \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} \quad , \quad \left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x = x_0}$$

biçiminde gösterilir.

ÖRNEK 21

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 5x^3 + 6x - 4$ **ise** $f^{vi}(x) = ?$

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2x^3 - 15x^2 + 6$

$f''(x) = 6x^2 - 30x$

$f'''(x) = 12x - 30$

$f^{iv}(x) = 12$

$f^{v}(x) = 0$

$f^{vi}(x) = 0$

ÖRNEK 22

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ **ise** $f^{iv}(x) = ?$

ÇÖZÜM

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ olduğundan

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$$

$$f^{iv}(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$$

olur.

SIRA SİZDE 5

1. $f(x) = \sqrt{x}$ ise $f'''(x) = ?$
2. $g(x) = x^4 - 5x + 6$ ise $g^{(6)}(x) = ?$
3. $h(x) = \sqrt[3]{x}$ ise $h'''(8) = ?$
4. $k(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$ ise $k''(1) = ?$

Kendimizi Sınayalım

1. $f(x) = x^2 - 3x$ fonksiyonun $[-1, 3]$ aralığındaki ortalama hızı nedir?

a. -1
b. 0
c. $\frac{1}{2}$
d. 1
e. 2

2. $f(x) = \sqrt{x}\,(1 - x)^3$ ise $f'(4)$ değeri kaçtır?

a. $-\frac{243}{4}$
b. $-\frac{27}{4}$
c. $\frac{27}{4}$
d. $\frac{621}{4}$
e. 162

3. $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$ ise $f''(2)$ değeri kaçtır?

a. -4
b. -2
c. 2
d. 4
e. 10

4. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 6}{\sqrt{x}}$ ise $f'(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x}} - 6$
b. $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x\sqrt{x}}$
c. $\frac{3x^2 + 3x + 6}{2x\sqrt{x}}$
d. $(2x + 3)\,2\sqrt{x}$
e. $\frac{2x + 3}{x}$

5. $f(x) = (2x - 1)^6(5x - 7)$ fonksiyonu için $f'(0)$ değeri kaçtır?

a. 89
b. 60
c. 47
d. -47
e. -60

6. $f(x) = \sqrt[5]{3x^2 - 7x + 1}$ ise $f'(2)$ değeri kaçtır?

a. $\frac{1}{5}$
b. $\frac{2}{5}$
c. 1
d. $\frac{5}{2}$
e. 5

7. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$ ise $f'(64)$ değeri kaçtır?

a. $\frac{11}{192}$
b. $\frac{13}{192}$
c. $\frac{7}{48}$
d. $\frac{7}{16}$
e. $\frac{7}{12}$

8. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ eğrisinin $x = 8$ noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $12y - x = 16$
b. $y - 12x = 16$
c. $3x - 4y = 16$
d. $3y - x = -2$
e. $12y - x = 94$

9. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ise $f'''(2)$ türev değeri kaçtır?

a. -6
b. -2
c. 2
d. 4
e. 6

10. x mal miktarı olmak üzere, bir malın milyon TL cinsinden toplam maliyet fonksiyonu,

$$C(x) = 25x + 240\sqrt{x} + 5000$$

dir. Buna göre 37. malın yaklaşık maliyeti kaç milyon TL'dir?

a. 43
b. 45
c. 5000
d. 7340
e. 7384

11. x mal miktarı olmak üzere, bir malın milyon TL cinsinden gelir fonksiyonu,

$$R(x) = 18x - \frac{x^2}{1000}$$

verilsin. Buna göre, $x = 2500$ noktasında marjinal gelir kaçtır?

a. 13
b. 12
c. 11
d. 10
e. 5

Biraz Daha Düşünelim

1. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + 6}{3x - 1}$ ise $f'(1)$ değeri kaçtır?

2. $g(x) = \sqrt[4]{3x^2 - 7x - 4}$ ise $g'(4)$ değeri kaçtır?

3. $h(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ ise $h'(2)$ değeri kaçtır?

Gottfried Wilhelm Von Leibniz

(1646 - 1716)

Diferansiyel ve integral hesabın kurucularından biri olan ünlü matematikçi, aynı zamanda hukuk, siyaset, tarih, mantık gibi bir çok alanda düşünce üreten evrensel deha.

"Bende o kadar fikir var ki, şayet benden daha iyi görmesini bilenler bir gün onları derinleştirecek ve benim zihin emeğime kendi kafalarının güzelliğini katacak olurlarsa, sonraları belki bir işe yarayabilir."

G. LEIBNIZ

"Doğanın bütün olayları birkaç değişmeyen kanunun matematik sonuçlarıdır."

P. S. LAPLACE