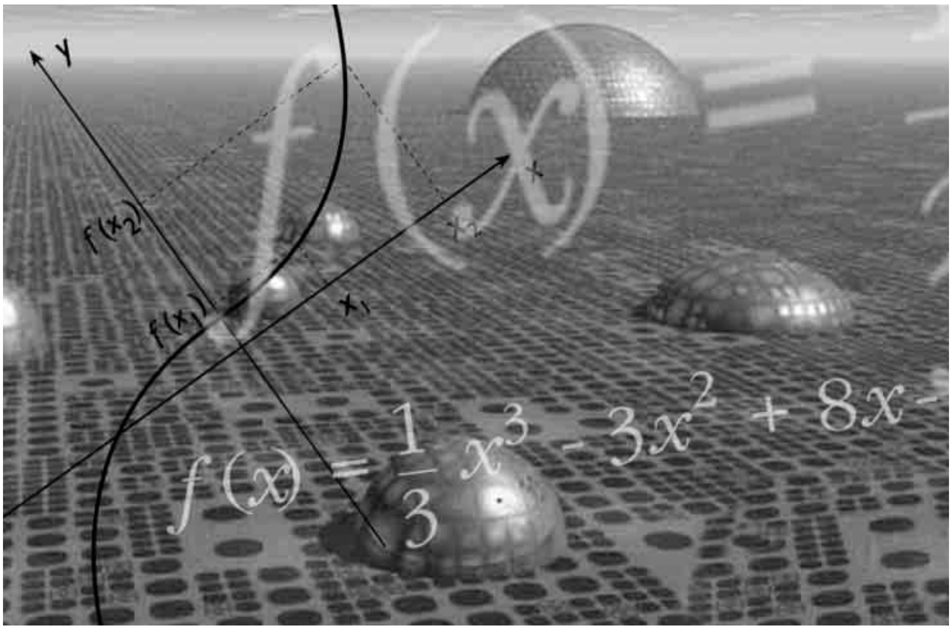
# 7

# Türev Uygulamaları




***Amaçlar***

*Bu üniteyi çalıştıktan sonra;*

- *fonksiyonların artan ve azalan olduğu aralıkları bularak gelirin veya kârın yükseldiği veya düştüğü aralıkları belirleyecek,*
- *fonksiyonun belirli bölgedeki en büyük ve en küçük değerlerini bulabilecek,*
- *fonksiyonun grafiğinin yükseliş biçimini belirleyebilecek,*
- *fonksiyonun resmini, yani grafiğini, çizecek,*
- *en düşük maliyet, en yüksek kâr elde etmek gibi minimum ve maksimum problemlerini çözebileceksiniz.*

## *İçindekiler*



DİKKAT

- ***Türev konusunu gözden geçiriniz.***
- ***Birinci ve ikinci mertebelerden türevlerin işaretlerinin önemine dikkat ediniz, bu amaçla denklem çözümü ve fonksiyonun işaretinin nasıl incelendiğini iyi öğreniniz.***
- ***Fonksiyonun grafiğine bakarak fonksiyonun davranışını anlamaya çalışınız.***

## *Giriş*

*Bu ünitede, türevin gerek matematik ve gerekse uygulamalı bilimler açısından önemli bazı uygulamalarını inceleyeceğiz. Bu amaçla bazı matematiksel kavramları açıklamadan önce şöyle bir problemi ele alalım:*

*Bir malın kâr fonksiyonu, x mal miktarı olmak üzere*

$$K(x) = -2x^2 + 496x - 1400, \quad 0 \leq x \leq 200$$

*olsun. Şimdi bazı üretim - satış miktarlarından elde edilecek kârları bulalım.*

$K(110) = 28960$, $K(120) = 29320$

$K(130) = 29280$, $K(150) = 28000$

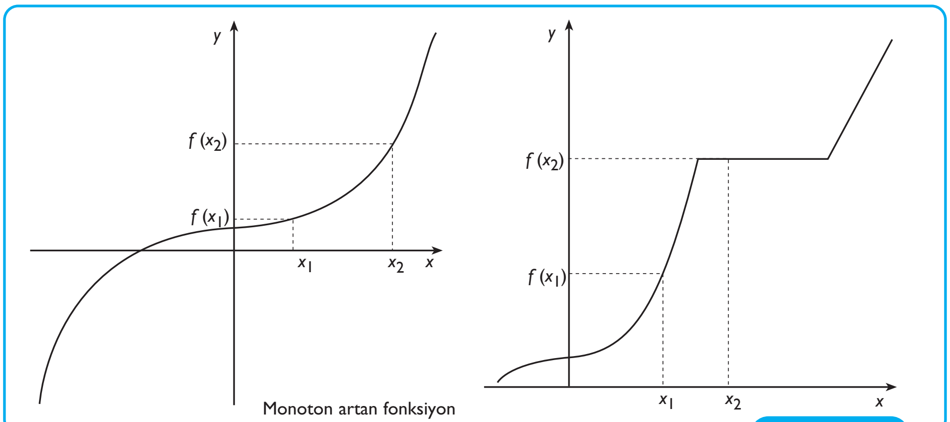
*Dikkat ederseniz satılan mal miktarı 110 birimden 120 birime çıktığında kâr artarken, satılan mal miktarı 120' den 130' a ve devam ederek 150' ye çıktığında elde edilen kâr azalmaktadır. Bu gözleme göre şu sorular akla gelmektedir.*

- *Hangi satış miktarlarında satış arttıkça kâr artmaktadır?*
- *En yüksek kâr hangi satış miktarında sağlanabilir?*

*Bu ünitede bu ve benzeri sorulara cevap verebilmeye olanak sağlayacak matematiksel kavramları inceleyeceğiz.*

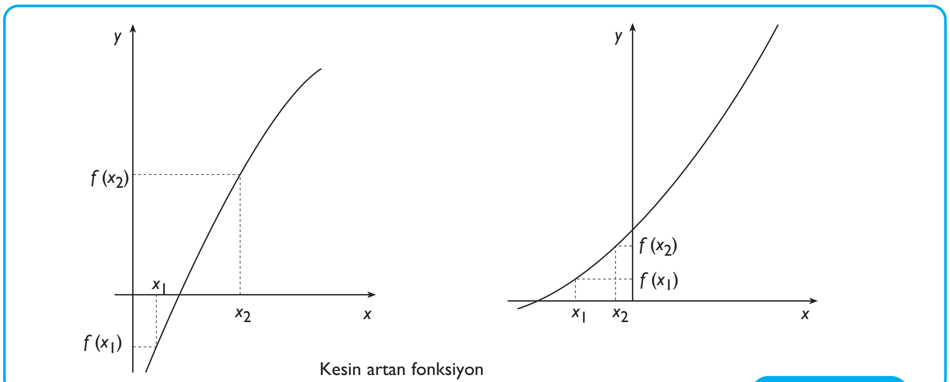
## ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

$f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x_1$ , $x_2 \in A$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyorsa, $f$ fonksiyonuna **monoton artan** (veya azalmayan), $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa **kesin artan** fonksiyon denir.




Monoton artan fonksiyon

Şekil 7.1

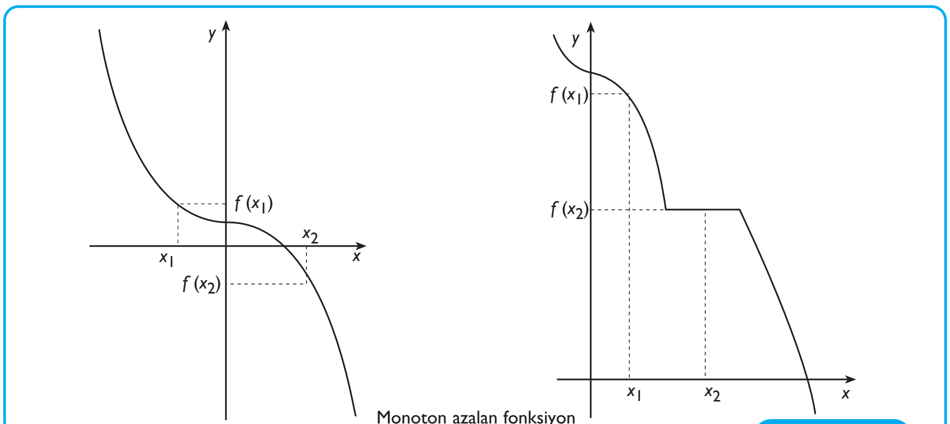



Kesin artan fonksiyon

Şekil 7.2

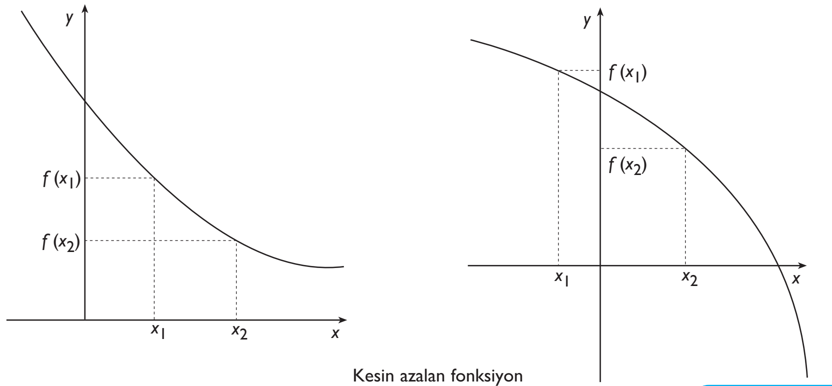
Monoton artan (veya kesin artan) fonksiyonun grafiğine dikkatli baktığımızda, koordinat sisteminde sağa doğru ilerlerken grafiğin yükseldiğini veya aynı yükseklikte kaldığını ancak hiçbir zaman düşmediğini görürüz.

Benzer şekilde, her $x_1$ , $x_2 \in A$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise $f$ fonksiyonuna **monoton azalan** (veya artmayan) fonksiyon, $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ ise $f$ fonksiyonuna **kesin azalan** fonksiyon denir.




Monoton azalan fonksiyon

Şekil 7.3




Kesin azalan fonksiyon

Şekil 7.4

Monoton azalan (veya kesin azalan) fonksiyonun grafiğinin de, sağa doğru ilerledikçe yükselmediğini görürüz.

Türevlenebilir bir fonksiyonun artan veya azalan olmasıyla türevinin işareti arasında yakın bir ilişki vardır.

$f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$

fonksiyonu sürekli ve her $x \in (a,\ b)$ için türevi olan bir fonksiyon olsun.

a) Eğer her $x \in (a,\ b)$ için $f\,'(x) \leq 0$ ise $f$ fonksiyonu monoton azalan, $f\,'(x) < 0$ ise kesin azalan fonksiyondur.

b) Eğer her $x \in (a,\ b)$ için $f\,'(x) \geq 0$ ise $f$ fonksiyonu monoton artan, $f\,'(x) > 0$ ise kesin artan fonksiyondur.

Bir aralıkta monoton artan veya kesin artan olan fonksiyona kısaca artan fonksiyon, benzer şekilde monoton azalan veya kesin azalan fonksiyona da azalan fonksiyon diyeceğiz.

Buna göre, bir aralık üzerinde türevlenebilen bir fonksiyonun türevinin işaretine bakarak fonksiyonun bu aralık üzerinde artan veya azalan olup olmadığına karar verebiliriz.

## ÖRNEK 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $f\,(x) = x^2$

***fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulalım.***

**ÇÖZÜM**

$f\,(x) = x^2$ fonksiyonu her noktada türevlenebilen bir fonksiyon olduğundan, bu fonksiyonun türevinin işaretini incelememiz yeterlidir.

$f\,'(x) = 2x$

olduğundan $x > 0$ ise $f\,'(x) > 0$ dır, dolayısıyla $(0,\ \infty)$ aralığında fonksiyon artandır, $x < 0$ ise $f\,'(x) < 0$ dır, dolayısıyla $(-\infty,\ 0)$ aralığında fonksiyon azalandır.

Bu bilgileri bir tablo ile aşağıdaki biçimde gösterebiliriz.

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f$ | | ↘ | | ↗ | |

Tablodan görüldüğü gibi fonksiyon $(-\infty,\ 0)$ aralığında kesin azalan, $(0,\ \infty)$ aralığında kesin artandır.

Bir fonksiyonun bir aralıkta türevi pozitif ise fonksiyon artan, türevi negatif ise fonksiyon bu aralıkta azalandır. Ancak bunun karşıtı doğru değildir. Yani, Bir fonksiyon bir aralıkta kesin artan ise bu aralıkta türevi daima pozitiftir, kesin azalan ise türevi daima negatiftir diyemeyiz. Örneğin $f(x) = x^3$ fonksiyonu kesin artandır ancak $x = 0$ da türevi sıfırdır.

**ÖRNEK 2**

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 7$

***fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.***

**ÇÖZÜM**

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 7$$

$$f'(x) = x^2 - 6x + 8$$

türevin işaretini incelemek için köklerini bulalım.

$x^2 - 6x + 8 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = 2$ , $x_2 = 4$ dür.

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | 4 | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

$x \in (-\infty, 2)$ için $f'(x) > 0$ ve $x \in (4, \infty)$ için $f'(x) > 0$ olduğundan $(-\infty, 2)$ ve $(4, \infty)$ aralıklarında fonksiyon artan, $x \in (2, 4)$ için $f'(x) < 0$ olduğundan $(2, 4)$ aralığında fonksiyon azalandır.

**SIRA SİZDE 1**

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$

fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Şimdi ünite girişinde ele aldığımız problemin çözümünü görelim.

**ÖRNEK 3**

***Bir malın toplam maliyet fonksiyonu, x mal miktarı, C(x) Milyon TL olmak üzere,***

$$C(x) = 0{,}5x^2 + 4x + 1400 \;,\; 0 \le x \le 200$$

***toplam gelir fonksiyonu, R(x) Milyon TL olmak üzere,***

$$R(x) = 500x - 1{,}5x^2 \;,\; 0 \le x \le 200$$

***dır.***

***Kârın artan ve azalan olduğu üretim satış aralıklarını bulunuz.***

**ÇÖZÜM**

Kâr, gelir ile maliyetin farkı olduğundan K kâr fonksiyonu,

$$K(x) = 500x - 1{,}5x^2 - (0{,}5x^2 + 4x + 1400)$$
$$= -2x^2 + 496x - 1400$$

olur.

$K$ fonksiyonunun türevinin işaretini incelememiz gerekiyor.

$$K'(x) = -4x + 496$$

$$-4x + 496 = 0$$

$$x = \frac{496}{4} = 124$$

| $x$ | 0 | | 124 | | 200 |
|---|---|---|---|---|---|
| $K'$ | | + | 0 | - | |
| $K$ | | ↗ | | ↘ | |

Bu durumda (0, 124) aralığında kâr artmakta, (124, 200) aralığında ise azalmaktadır.
Bunun anlamı, üretilip satılan mal miktarı 124 birime kadar arttıkça kâr da artacaktır. Ancak 124 birimden sonra üretilip satılan mal miktarı arttıkça kâr miktarı azalacaktır. Örneğin,

$$K(100) = 28200\,, \quad K(101) = 28294\,, \quad K(124) = 29352$$
$$K(130) = 29280\,, \quad K(150) = 28000\,, \quad K(151) = 27894$$

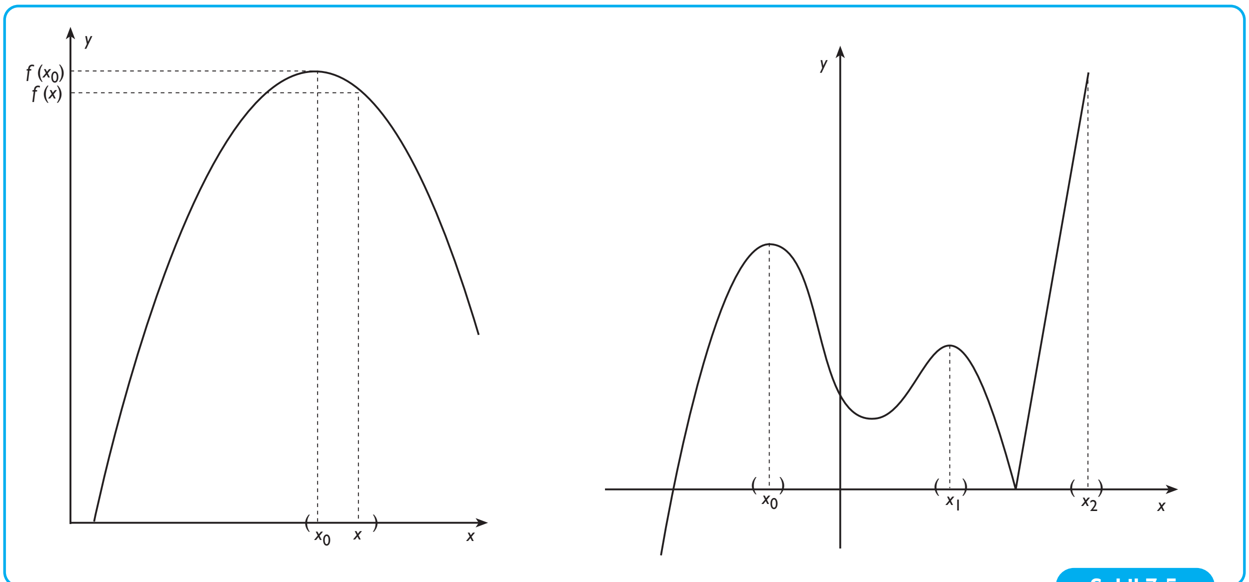
dir. Bu sayılardan da gördüğümüz gibi 101 birim malın satışından elde edilen kâr 100 birim malın satışından elde edilen kârdan fazla iken 151 birim malın satışından elde edilen kâr 150 birim malın satışından elde edilen kârdan daha azdır. O zaman, ne kadar mal üretilip satılırsa kâr en yüksek olur, sorusu akla gelmektedir.
Bu soruya cevap verebilmek için maksimum ve minimum kavramlarını bilmemiz gerekmektedir.

## YEREL MAKSİMUM VE YEREL MİNİMUM

$f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $x_0 \in A$ için $x_0$ noktasını içeren uygun bir aralık $I$ ($I \subset A$) olsun.

i) Eğer her $x \in I$ için $f(x) \leq f(x_0)$ oluyorsa, $x_0$ noktasına $f$ fonksiyonunun bir **yerel maksimum noktası**, $f(x_0)$ sayısına da bir **yerel maksimum değeri** denir.

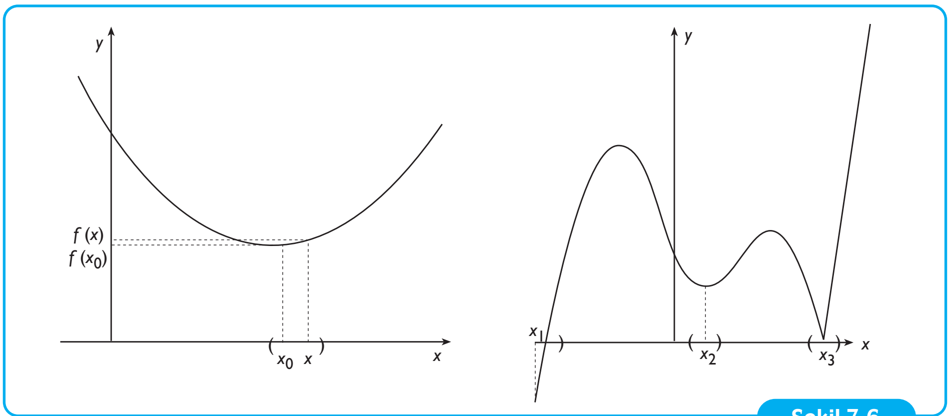
Şekil 7.5'de iki fonksiyonun yerel maksimum noktaları gösterilmiştir.




Şekil 7.5

ii) Eğer her $x \in I$ için $f(x_0) \leq f(x)$ oluyorsa, $x_0$ noktasına $f$ fonksiyonunun bir **yerel minimum noktası**, $f(x_0)$ sayısına da bir **yerel minimum değeri** denir.

Şekil 7.6 'da iki fonksiyonun bazı yerel minimum noktaları gösterilmiştir.




Şekil 7.6

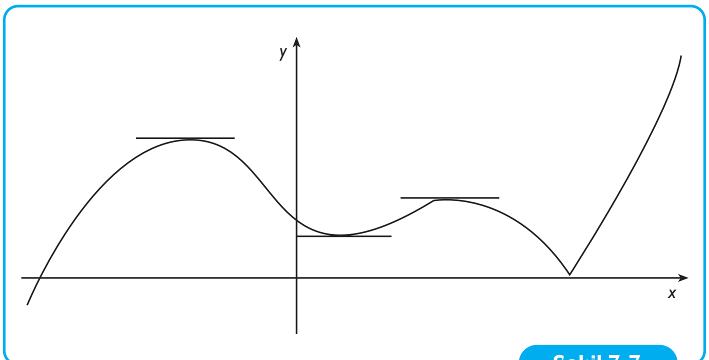
Yerel maksimum ve yerel minimum kavramları bir noktanın civarındaki fonksiyon değerlerinin davranışı ile ilgili kavramlardır. Yerel maksimum noktasındaki fonksiyon değeri o noktaya yakın noktalardaki fonksiyon değerlerinden daima büyük, yerel minimum noktasındaki fonksiyon değeri de o noktaya yakın noktalardaki fonksiyon değerlerinden daima küçüktür.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve her $x \in (a, b)$ için türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer bir $x_0 \in (a, b)$ noktası $f$ fonksiyonunun bir yerel ekstremum noktası ise $f'(x_0) = 0$ dır.

Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına fonksiyonun **ekstremum noktaları** denir.

**$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ fonksiyonu sürekli ve her $x \in (a, b)$ için türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer bir $x_0 \in (a, b)$ noktası $f$ fonksiyonunun bir yerel ekstremum noktası ise $f'(x_0) = 0$ dır.**

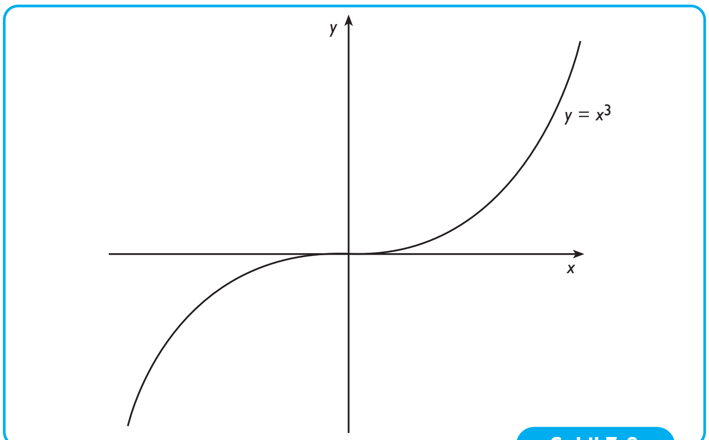
Yandaki Şekil 7.7'de görüldüğü gibi bir fonksiyonun bir ekstremum noktasında türevi varsa bu noktada türev sıfırdır, dolayısıyla bu noktada yatay teğet vardır.




Şekil 7.7

Ancak türevi olan bir fonksiyonun bir noktada türevinin sıfır olması, bu noktanın bir yerel ekstremum noktası olması için yeterli değildir.

Örneğin $y = x^3$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevi sıfır olmasına karşılık bu nokta bir yerel ekstremum noktası değildir (Şekil 7.8).




Şekil 7.8

Bu nedenle türevi olan bir $f$ fonksiyonu için $f'(x) = 0$ koşulunu sağlayan noktalar ekstremum noktası olmaya aday noktalardır. Böyle noktalara $f$ fonksiyonunun **kritik noktaları** diyoruz.

**ÖRNEK 4** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $f(x) = x^3 - 16x^2 + 20x - 5$

***fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz.***

**ÇÖZÜM**

$f$ fonksiyonu 3. dereceden polinom fonksiyon olduğundan her noktada türevi vardır. Buna göre, $f$ nin kritik noktaları türevi sıfır yapan noktalar olduğundan

$$f'(x) = 3x^2 - 32x + 20 = 0$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad , \quad x_2 = 10$$

bulunur. O halde $f$ nin kritik noktaları $\frac{2}{3}$ ve 10 dur.

Bir aralık üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyonun ekstremum noktalarını bulmak için izlenecek iki yöntem vereceğiz.

## Birinci Türev Testi

Bir fonksiyonun ekstremum noktalarını bulmak için fonksiyonun öncelikle türevi ve türevin kökleri, yani kritik noktaları, bulunur. Daha sonra varsa fonksiyonun türevinin olmadığı noktalar da belirlenip türevin işareti incelenir.

Fonksiyonun sürekli olup türevinin işaret değiştirdiği noktalar ekstremum noktalarıdır. Bu noktaların yerel maksimum veya yerel minimum noktası olduklarına şöyle karar verilir.

Fonksiyonun sürekli olup türevinin işaret değiştirdiği noktalar ekstremum noktalarıdır. Bu noktaların yerel maksimum veya yerel minimum noktası olduklarına türevin işareti incelenerek karar verilir.

a) Sürekli fonksiyonun artanlıktan azalanlığa geçtiği, diğer bir deyişle türevin işaretinin (+) dan (-) ye geçtiği nokta yerel maksimum noktasıdır.

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | - |

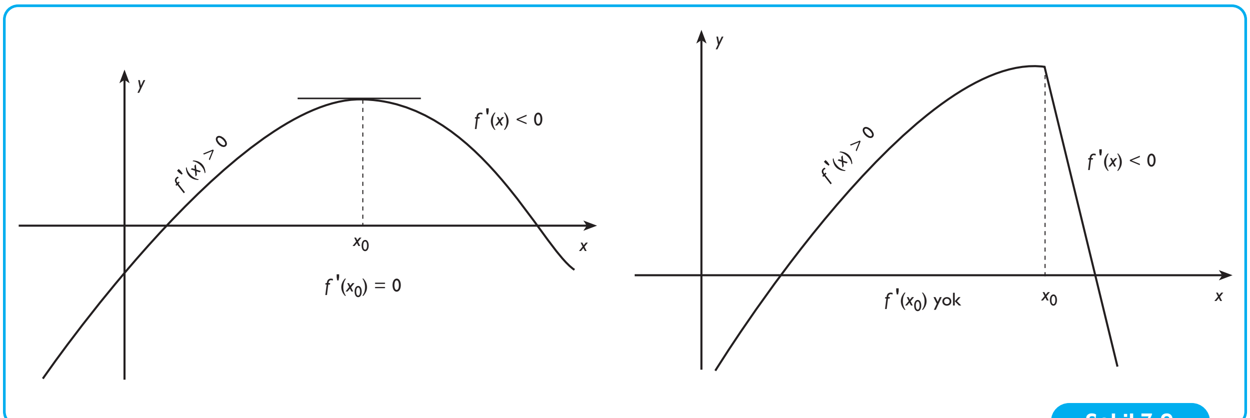
$f'(x_0) = 0$

$x_0$ yerel maksimum noktası

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | | - |

$f$ sürekli, $f'(x_0)$ yok

$x_0$ yerel maksimum noktası




Şekil 7.9

b) Sürekli fonksiyonun azalanlıktan artanlığa geçtiği nokta yani türevin işaretinin (-) den (+) ya değiştiği nokta yerel minimum noktasıdır.

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | - | 0 | + |

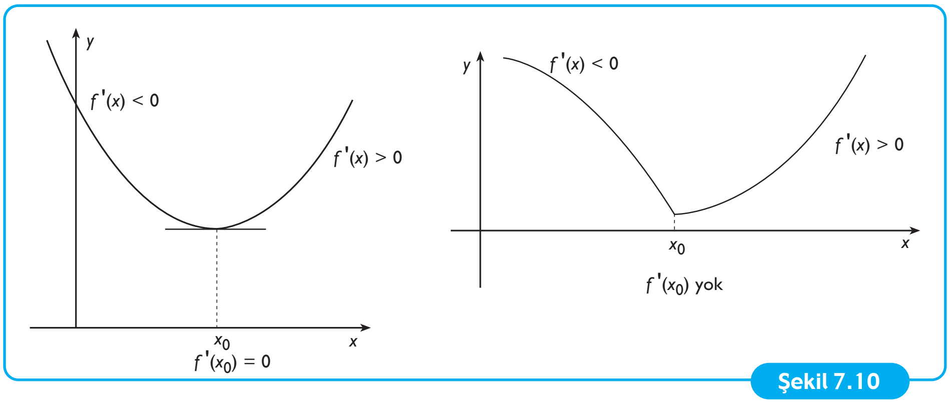
$f'(x_0) = 0$

$x_0$ yerel minimum noktası

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | - | | + |

$f$ sürekli, $f'(x_0)$ yok

$x_0$ yerel minimum noktası




Şekil 7.10

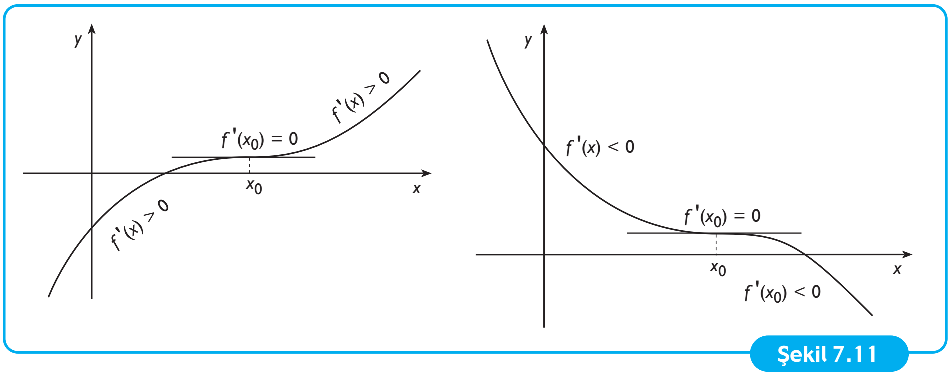
Türevin işaret değiştirmediği nokta yerel ekstremum noktası değildir.

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | + |

$x_0$ yerel ekstremum noktası değildir

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | - | 0 | - |

$x_0$ yerel ekstremum noktası değildir




Şekil 7.11

**ÖRNEK 5**

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 6$$

***fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulalım.***

**ÇÖZÜM**

$f'(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$

$x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 2x - 3) = 0$

$x^2(x + 1)(x - 3) = 0 \quad , \quad x_{1,2} = 0, \ x_3 = -1, \ x_4 = 3$

Şimdi de türevin işaretini inceleyelim.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $3$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | 0 | - | 0 | - | 0 | + | |
| $f$ | | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ | |

$x = -1$, türev (+) dan (-) ye işaret değiştirdiği için yerel maksimum noktasıdır.
$x = 0$ türevin kökü olmasına karşılık bu noktada türev işaret değiştirmediği için bu nokta yerel ekstremum noktası değildir.
$x = 3$, türev (-) den (+) ya işaret değiştirdiği için yerel minimum noktasıdır.

## İkinci Türev Testi

$f''(x_0) = 0$ olması durumunda ikinci türev testi ile karar verilemez. Bu durumda birinci türev testini uygulayınız.

$f: (a, b) \to \mathbb{R}$ ikinci mertebeden sürekli türevi olan bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ bu fonksiyonun bir kritik noktası ($f'(x_0) = 0$) olsun.

a) Eğer $f''(x_0) > 0$ ise $x_0$ noktası $f$ fonksiyonunun bir yerel minimum noktasıdır.

b) Eğer $f''(x_0) < 0$ ise $x_0$ noktası $f$ fonksiyonunun bir yerel maksimum noktasıdır.

**ÖRNEK 6**

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7$

***fonksiyonunun ekstremum noktaları bulalım.***

**ÇÖZÜM**

$f$ fonksiyonunun her noktada türevi olduğundan ekstremum noktaları sadece türevin sıfır olduğu noktalarda olabilir.

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$

$4x(x^2 - 3x + 2) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$

0, 1 ve 2 bu fonksiyonun kritik noktalarıdır.

$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8$

$f''(0) = 8 > 0$ olduğundan $x = 0$ yerel minimum noktasıdır.

$f''(1) = 12 - 24 + 8 = -4 < 0$

olduğundan $x = 1$ yerel maksimum noktasıdır.

$f''(2) = 12.2^2 - 24 . 2 + 8 = 8 > 0$

olduğundan $x = 2$ yerel minimum noktasıdır.

**ÖRNEK 7**

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

***fonksiyonunun ekstremum noktalarını araştıralım.***

**ÇÖZÜM**

$$f'(x) = \frac{1.(x^2+1) - 2x.x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \text{ ise } x = -1, \quad x = 1$$

$$f''(x) = \frac{-2x.(x^2+1)^2 - 2(x^2+1).2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x.(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(-1) = \frac{-2+6}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0$$

olduğundan $x = -1$ yerel minimum noktası,

$$f''(1) = \frac{2-6}{2^3} = \frac{-1}{2} < 0$$

olduğundan $x = 1$ yerel maksimum noktasıdır.

**ÖRNEK 8**

$$f(x) = x - 10\sqrt{x} + 100$$

***fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını araştıralım.***

**ÇÖZÜM**

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} = 0, \quad x = 25$$

| $x$ | 0 | | 25 | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | - | 0 | + | |
| $f$ | | ↘ | | ↗ | |

Tablodan görüldüğü gibi $x = 25$ yerel minimum noktasıdır. $f(25) = 75$ fonksiyonun yerel minimum değeridir.

**ÖRNEK 9**

***Bir malın, x mal miktarı türünden kâr fonksiyonu, milyon TL cinsinden,***

$$K(x) = -\frac{x^2}{750} + 4x - 2250, \quad 0 \leq x \leq 3000$$

***dir. Maksimum kârın elde edildiği mal miktarını bulalım.***

**ÇÖZÜM**

$$K(x) = -\frac{x^2}{750} + 4x - 2250, \quad 0 \leq x \leq 3000$$

$$K'(x) = -\frac{x}{375} + 4, \quad -\frac{x}{375} + 4 = 0, \; x = 1500$$

| $x$ | 0 | | 1500 | | 3000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $K'$ | | + | 0 | - | |
| $K$ | | ↗ | 750 | ↘ | |

Bu üründen 1500 birim üretilip satıldığında maksimum kâr olarak 750 milyon TL elde edilir.

$K(1000) \cong 416{,}7$ , $K(2000) = 416{,}7$ , $K(3000) \cong -2250$

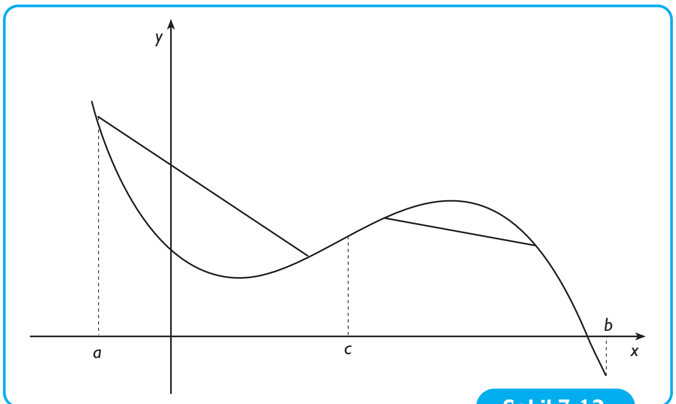
Dikkat ederseniz 3000 birim mal üretilip satıldığında 2250 milyon TL , zarar edilir.

**SIRA SİZDE 2**

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktasının apsisi nedir?
2. $g(x) = \sqrt{x} - 2x + 9$ fonksiyonunun maksimum noktasının apsisi kaçtır?
3. $k(x) = -\dfrac{x^2}{100} + 40x - 3000$ kâr fonksiyonunun maksimum noktasını bulunuz.
4. $h(x) = x + \dfrac{9}{x} + 5$ fonksiyonunun minimum noktasını bulunuz.

## BÜKEYLİK

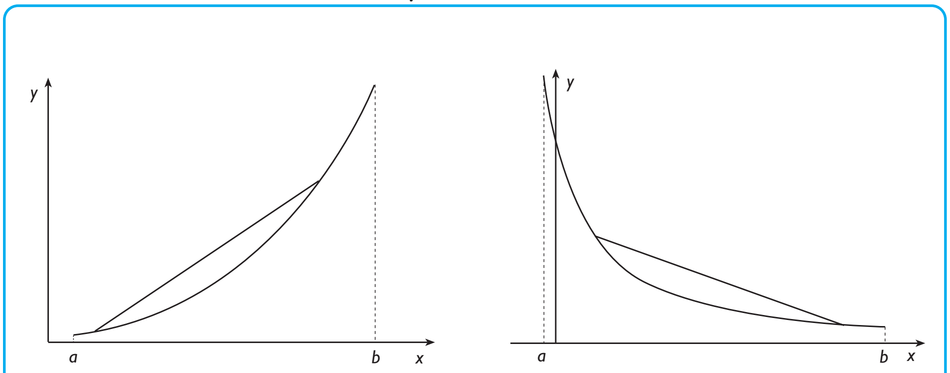
Aşağıda $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı bir $f$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu grafiğin $(a, c)$ aralığı üzerindeki parçasında herhangi bir kiriş grafiğin üstünde kalırken, grafiğin $(c, b)$ parçası üzerindeki herhangi bir kiriş grafiğin altında kalmaktadır. Bu iki durumu bükeylik kavramı ile birbirinden ayırmaktayız.



Şekil 7.12

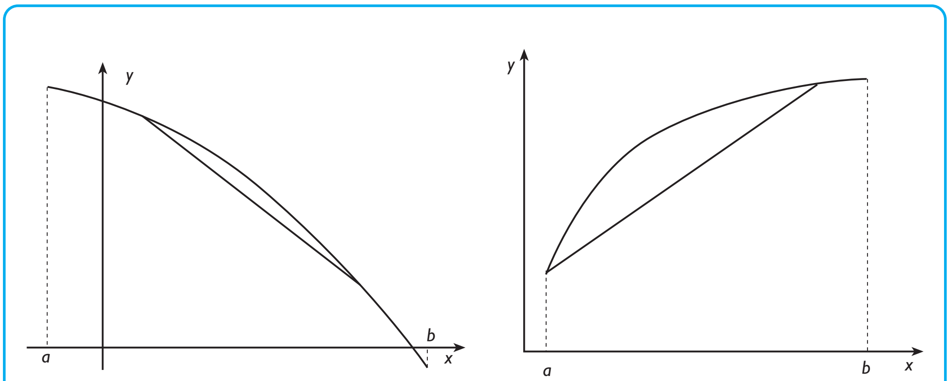
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer fonksiyonun grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren kiriş daima grafiğin üzerinde kalıyorsa, $f$ fonksiyonuna **yukarı bükey** veya **konveks** fonksiyon, eğer kiriş daima grafiğin altında kalıyorsa $f$ fonksiyonuna **aşağı bükey** veya **konkav** fonksiyon denir.

Şekil 7. 12 deki $f$ fonksiyonu $(a, c)$ aralığında yukarı bükey, $(c, b)$ aralığında aşağı bükeydir.



Yukarı bükey (konveks) fonksiyon

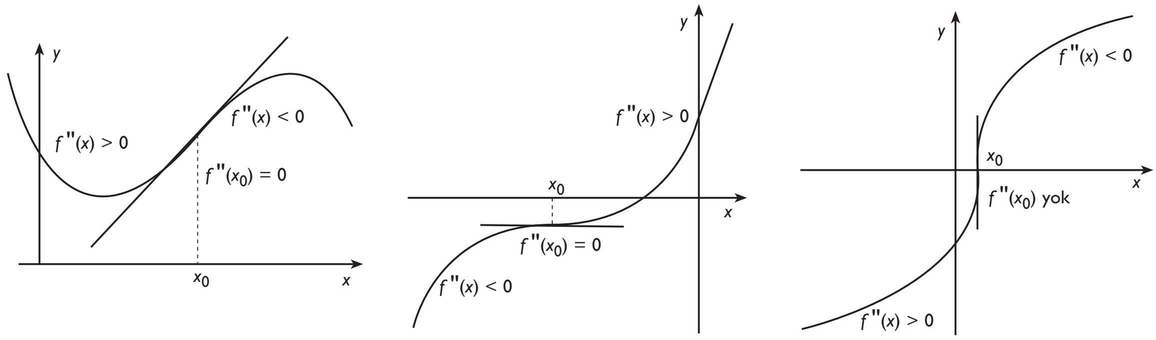
Şekil 7.13



Aşağı bükey (konkav) fonksiyon

Şekil 7.14

Bir fonksiyonun bükeyliğinin değiştiği noktaya **büküm** noktası denir.




Şekil 7.15

$f : [a,\ b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli türevi olan bir fonksiyon olmak üzere,

a) Her $x \in (a,\ b)$ için $f''(x) > 0$ ise $f$ fonksiyonu $[a,\ b]$ aralığında yukarı bükeydir,

b) Her $x \in (a,\ b)$ için $f''(x) < 0$ ise f fonksiyon [a, b] aralığında aşağı bükeydir.

Buna göre bir fonksiyonun yukarı bükey ve aşağı bükey olduğu aralıkları bulmak için ikinci türevinin işaretini incelemek yeterlidir.

Sürekli bir fonksiyonun ikinci mertebeden türevinin işaret değiştirdiği bir nokta da fonksiyonun büküm noktasıdır.

**ÖRNEK 10**

$f(x) = x^4 - 24x^2 + x + 1$

***fonksiyonunun yukarı bükey ve aşağı bükey olduğu aralıklarla büküm noktalarını bulalım.***

**ÇÖZÜM**

$f$ fonksiyonunun her mertebeden türevi olduğu için bükeyliğini belirlemek için ikinci türevinin işaretini incelemek yeterlidir.

$f'(x) = 4x^3 - 48x + 1$

$f''(x) = 12x^2 - 48$

$12x^2 - 48 = 0, \quad x = -2, \quad x = 2$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $2$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f$ | Yukarı bükey | | Aşağı bükey | | Yukarı bükey | |

Tablodan da gördüğümüz gibi $f$ fonksiyonu $(-\infty, -2]$ ve $[2, \infty)$ aralıklarında yukarı bükey, $[-2, 2]$ aralığında aşağı bükeydir. $x = -2$, $x = 2$ noktalarında fonksiyon sürekli ve bu noktalarda ikinci mertebeden türev işaret değiştirdiğinden bu noktalar büküm noktasıdır.

**SIRA SİZDE 3**

1. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2x} + 2$ fonksiyonu hangi aralıkta yukarı bükeydir?
2. $g(x) = x^3 + 3x - 7$ fonksiyonunun büküm noktasını bulunuz.

## GRAFİK ÇİZİMİ

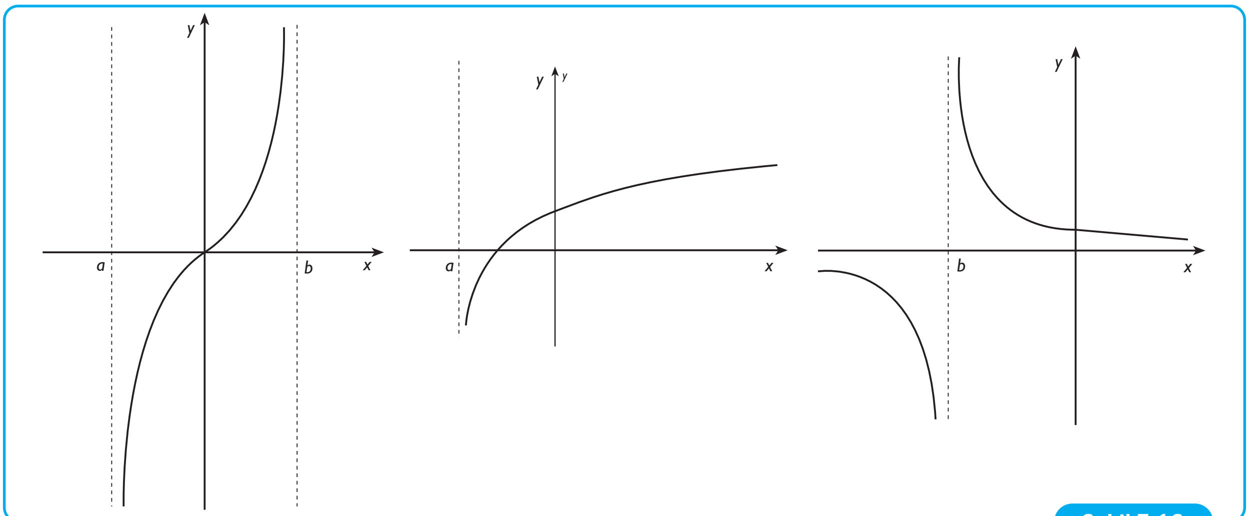
Bir fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıklar, ekstremum noktaları gibi temel özellikleri en açık biçimde grafiğinden görülebilir. Bir fonksiyonun grafiği onun resmidir. Bu resim en net biçimde türev kullanılarak çekilebilir. Türev sanki fotoğraf makinasının flaşı gibidir. Nasıl ki flaş, resmi çekilecek nesneyi aydınlatarak ayrıntıların kaydını sağlarsa, türev de fonksiyon davranışlarını ayrıntılı bir biçimde inceleme olanağı sağlar. Buraya kadar genel hatlarıyla çizdiğimiz grafikleri, artık daha ayrıntılı ve daha kolay çizebileceksiniz.

Bir fonksiyonun grafiği çizilirken genellikle aşağıdaki adımlar izlenir.

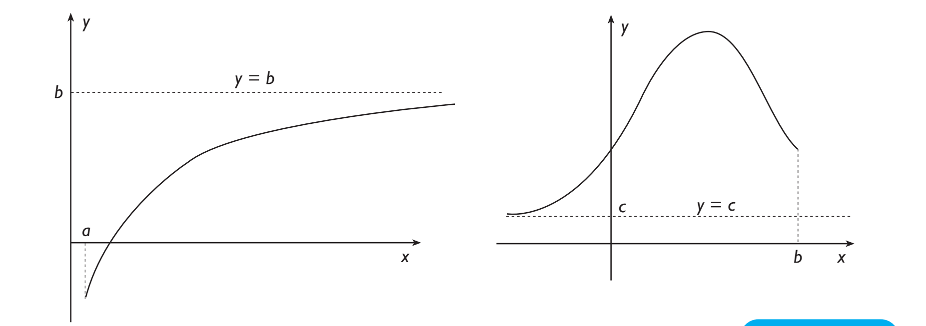
i) Fonksiyonun tanım kümesi açıkça verilmemişse öncelikle tanım kümesi belirlenir.
ii) Fonksiyonun tanım kümesini oluşturan aralıkların uç noktalarında varsa fonksiyon değerleri, yoksa fonksiyonun bu noktalardaki limitleri bulunur.
iii) Birinci ve ikinci mertebeden türevler yardımıyla fonksiyonun artan, azalan olduğu aralıklar, ekstremum noktaları ve bükeyliği belirlenir.
iv) Grafiğin koordinat eksenlerini kestiği noktalar araştırılır.
v) Elde edilen bilgiler bir tabloda toplanır.
vi) Tabloya uygun grafik çizilir.

Bu ve bundan önceki ünitelerde ii-inci adım dışındaki adımlarda ifade edilen kavramlar hakkında bilgi edinmiş bulunuyorsunuz. Biraz sonra vereceğimiz örneklerle de bu bilgilerinizi hatırlayacaksınız. Şimdi ii-inci maddede bulunması gereken limitlerde karşımıza çıkan asimptot kavramını açıklayalım.

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (veya $-\infty$) ise $x = a$ doğrusuna $f$ fonksiyonunun **düşey asimptotu** denir. Benzer şekilde $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$ (veya $-\infty$) ise $x = b$ doğrusu da düşey asimptottur.




Şekil 7.16




**Şekil 7.17**

$f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ ise $y=b$ doğrusuna $f$ fonksiyonunun **yatay asimptotu** denir.

Benzer şekilde $g:(-\infty, a)\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunda $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=c$ oluyorsa, $y=c$ doğrusu yatay asimptottur.

Yatay asimptot, bağımsız değişkenin yeteri kadar büyük veya negatif yönde yeteri kadar küçük değerlerinde fonksiyonun sabit fonksiyon gibi davrandığını ifade eder.

Şimdi yukarıdaki adımları izleyerek çeşitli fonksiyonların grafiklerini çizelim.

**ÖRNEK 11**

$$y = C(x) = 2000 + 50x - \frac{x^2}{16}\ ,\ 0 \le x \le 600$$

***toplam maliyet fonksiyonunun grafiğini çizelim.***

**ÇÖZÜM**

$0 \le x \le 600$ verildiğinden bu fonksiyonu,

$$C:[0, 600] \to \mathbb{R},\ C(x) = 2000 + 50x - \frac{x^2}{16}$$

şeklinde düşünebiliriz. Buna göre,

i) Tanım kümesi [0,600] kapalı aralığıdır.

ii) Fonksiyon $x = 0$ ve $x = 600$ de tanımlı olduğundan $C(0) = 2000$, $C(600) = 9500$

iii)

$$C'(x) = 50 - \frac{x}{8},\ 50 - \frac{x}{8} = 0,\quad x = 400,\ \mathrm{C}(400) = 12000$$

$$C''(x) = -\frac{1}{8},\ C''(400) = -\frac{1}{8} < 0 \ \text{ olduğundan}$$

$x = 400$ yerel maksimum noktasıdır.

| x | 0 | | 400 | | 600 |
|---|---|---|---|---|---|
| C' | | + | 0 | - | |
| C" | | - | | - | |
| C | 2000 | ↗ | 12000 | ↘ | 9500 |

Fonksiyon (0, 400) aralığnda artan, (fonksiyon değerlerinin 2000 den 12000 e arttığına dikkat ediniz), (400, 600) aralığında azalandır (bu aralıkta da 12000 den 9500 e azaldığına dikkat ediniz).

$x = 400$ yerel maksimum, $C(400) = 12000$ yerel maksimum (aynı zamanda mutlak maksimum) değeridir. Her $x$ için $C''(x) < 0$ olduğundan grafik aşağı bükeydir.

Fonksiyonun y-eksenini kestiği noktaları bulmak için $x = 0$ için y değerini bulmamız gerekiyor. $C(0) = 2000$ dir. y = 0 yani $C(x) = 0$ denkleminin varsa kökleri de grafiğin $x$ eksenini kestiği noktaları verecektir.

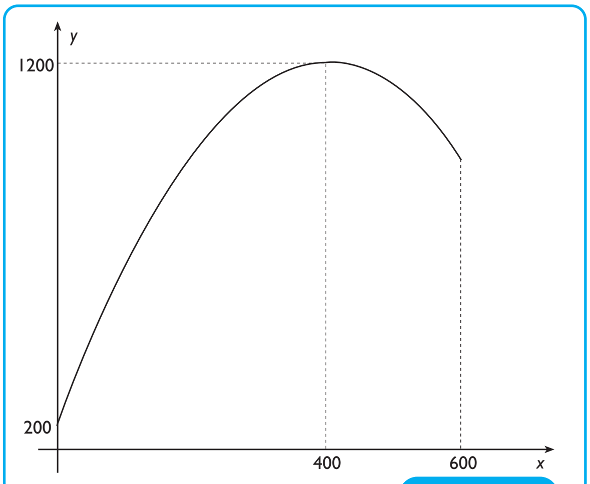
$$2000 + 50x - \frac{x^2}{16} = 0$$

bu denklemin kökleri olan

$$x_1 = 400 + 80\sqrt{30} \cong 838{,}2; \quad x_2 = 400 - 80\sqrt{30} \cong -38{,}2$$

sayıları [0,600] aralığında olmadığından grafik $x$ ekseninni kesmez. Fonksiyonun tanım kümesi yukarıdaki $x_1$, $x_2$ sayılarını içeren bir aralık olsaydı grafik $x$ eksenini bu noktalarda kesecekti.

Bu bilgilere göre $C$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olacaktır.




Şekil 7.18

**ÖRNEK 12**

$$y = f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3$$

***fonksiyonunun grafiğini çizelim.***

**ÇÖZÜM**

Tanım kümesi $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ dır.

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^4}{4} - x^3\right) = +\infty, \quad \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^4}{4} - x^3\right) = \infty$$

$$f'(x) = x^3 - 3x^2$$

$$x^3 - 3x^2 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 3,$$

$$f(0) = 0, \quad f(3) = -\frac{27}{4}$$

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 3 | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | - | 0 | - | 0 | + | |
| $f$ | $\infty$ | $\searrow$ | 0 | $\searrow$ | $-\frac{27}{4}$ | $\nearrow$ | $\infty$ |

$x = 0$ da türev işaret değiştirmediğinden bu nokta bir yerel ekstremum noktası değildir. $x = 3$ te yerel minimum vardır.

$f''(x) = 3x^2 - 6x$

$3x^2 - 6x = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$

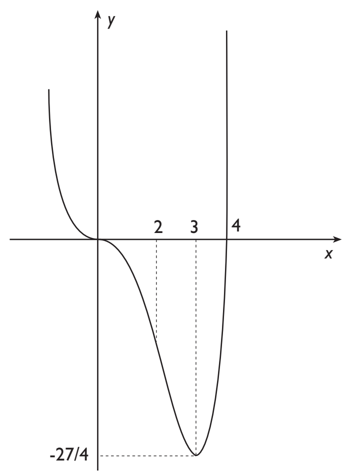
| $x$ | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f$ | $\cup$ | | $\cap$ | | $\cup$ |

$x = 0$ ve $x = 2$ noktaları büküm noktasıdır.

$x = 0$ için $y = 0$

$y = 0, \quad \frac{x^4}{4} - x^3 = 0 , \quad \frac{x^3}{4}(x - 4) = 0 , \quad x = 0 , \quad x = 4$

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | 3 | | 4 | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | - | 0 | - | | - | 0 | + | | + | |
| $f''$ | | + | 0 | - | 0 | + | | + | | + | |
| $f$ | $\infty$ | $\searrow$ | 0 | $\searrow$ | -4 | $\searrow$ | $-\frac{27}{4}$ | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | $\infty$ |




Şekil 7.19

**ÖRNEK 13**

$$y = f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

***fonksiyonunun grafiğini çizelim.***

**ÇÖZÜM**

Fonksiyon, paydanın kökleri olan -1 ve 1 de tanımlı değildir. Bu nedenle tanım kümesi,

$$R - \{-1,1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

dır.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0 \;,\; \lim_{x\to \infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0 \;,\; y = 0 \quad \text{yatay asimptottur.}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x}{x^2-1} = -\infty \;,\; \lim_{x\to -1^+} \frac{2x}{x^2-1} = +\infty \;,\; x = -1 \quad \text{düşey asimptot}$$

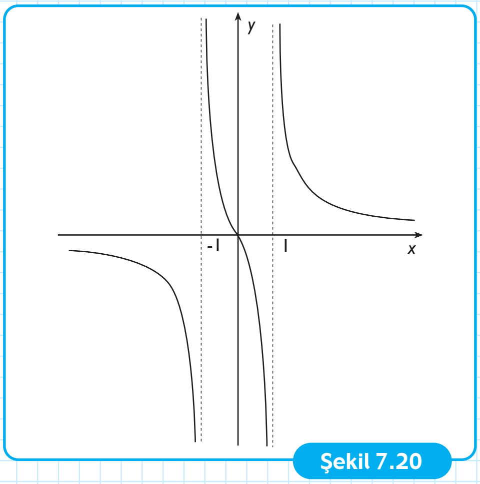
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x^2-1} = -\infty \;,\; \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2-1} = +\infty \;,\; x = 1 \quad \text{düşey asimptot}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2-1) - 2x.\,2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2-2)^2} = 0 \;,\; -2x^2 - 2 = 0 \;,\; x^2 = -1$$

kök yok

$x = 0$ için $y = 0$ , $y = 0$ için $x = 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | \|\| | $-$ | \|\| | $-$ | |
| $f$ | $0$ | ↘ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | ↘ | $0$ |




Şekil 7.20

**SIRA SİZDE 4**

**1.** $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2x} + 5$ fonksiyonunun düşey asimptotunu bulunuz.

**2.** $g(x) = \dfrac{3x - 5}{1 - 2x}$ fonksiyonunun yatay asimptotunu bulunuz.

## Maksimum ve Minimum Problemleri

Bir işletmeci hangi üretim düzeyinde ortalama maliyetin en düşük, hangi üretim-satış miktarında en yüksek kâr elde edeceğini bilmek ister. Bu değerleri yaşayarak değil hesaplayarak bilmek zorundadır. Yaşayarak öğrenmek isteyenlerin büyük olasılıkla ikinci bir şansı olmayacaktır. En küçük veya en büyük değeri bulma problemlerinde en büyük yardımcımız türev kavramıdır. Bu kesimde bununla ilgili problemlere iki örnek vereceğiz.

**ÖRNEK 14**

Kare prizma biçiminde 800 cm$^3$ lük kapalı bir kutu yapılacaktır. Kutunun alt ve üst tabanlarının birim maliyeti yan yüzlerinin birim maliyetinin 2 katı olduğuna göre, en ucuza malolacak kutunun boyutlarını bulunuz.

**ÇÖZÜM**

Problemi çözmek için önce matematiksel ifadesini bulmamız gerekir. Bunun için kutunun taban kenar uzunluklarına $x$ cm, yüksekliğine y cm diyelim.

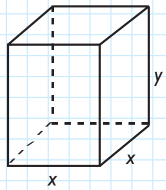
Kutunun hacmi : $V = x^2 y$ dir.

Taban alanları : $x^2 + x^2 = 2x^2$

Yanal yüz alanları : $4xy$

Toplam alan : $2x^2 + 4xy$

dir.




Yan yüzün birim maliyetine 1 dersek, tabanların birim maliyeti 2 olur.
Bu durumda

$$C = 2x^2 \,.\, 2 + 4xy \,.1 = 4x^2 + 4xy$$

olur. Dikkat ederseniz maliyet $x$ ve $y$ değişkenlerine bağlıdır. Burada hacimden yararlanarak $y$ yi $x$ türünden ifade edebiliriz.

$$V = x^2 y = 800 \quad \text{olduğundan} \quad y = \frac{800}{x^2}$$

$$C(x) = 4x^2 + 4x.\frac{800}{x^2} = 4x^2 + \frac{3200}{x}$$

bulunur.

Şimdi $C$ fonksiyonunun minimum noktasını bulmalıyız.

$$C'(x) = 8x - \frac{3200}{x^2} = \frac{8x^3 - 3200}{x^2}$$

$$\frac{8x^3 - 3200}{x^2} = 0 \quad , \quad 8\,(x^3 - 400) = 0$$

Buradan $x = \sqrt[3]{400} \cong 7{,}37$ cm

| x | 0 | 7,37 | ∞ |
|---|---|---|---|
| C' | - | 0 | + |
| C | ↘ | | ↗ |

Tablodan görüldüğü gibi $x = 7{,}37$ bir minimum noktasıdır. $x$ in bu değerine karşılık gelen y değerini bulalım.

$$y = \frac{800}{x^2} \cong \frac{800}{54{,}29} \cong 14{,}74 \text{ cm}$$

Buna göre, taban kenarları 7,37 cm, yüksekliği 14,74 cm olan kutu en ucuza malolacaktır.

**ÖRNEK 15**

***Bir turistik otel işletmesi bir seyahat acentasıyla şu şekilde anlaşma yapmıştır. 150 turiste kadar kişi başına konaklama ücreti günlük 8 milyon TL, 150 kişiden sonra, 150 ile 300 arasındaki her bir kişiye karşılık her müşteriden 20.000 TL indirim yapılacaktır. Otelin bir kişi için masrafı 4.000.000 TL olduğuna göre,***

***a) otele maksimum geliri sağlayacak,***

***b) otele maksimum kârı sağlayacak***

***turist sayısını bulunuz.***

**ÇÖZÜM**

Önce otelin gelirini ve kârını matematik dille ifade etmemiz gerekiyor.

$$R(x) = \begin{cases} x \,.\, 8\,000\,000 \quad , & 0 \le x \le 150 \\ \left[\, 8\,000\,000 - (x - 150)\,.\,20.000 \,\right] x \;, & 150 < x \le 300 \end{cases}$$

veya

$$R(x) = \begin{cases} 8\,000\,000\,.\,x \quad , & 0 \le x \le 150 \\ -20\,000x^2 + 11\,000\,000\,x \;, & 150 < x \le 300 \end{cases}$$

R fonksiyonunun maksimum noktasını bulmak için türevini alalım.

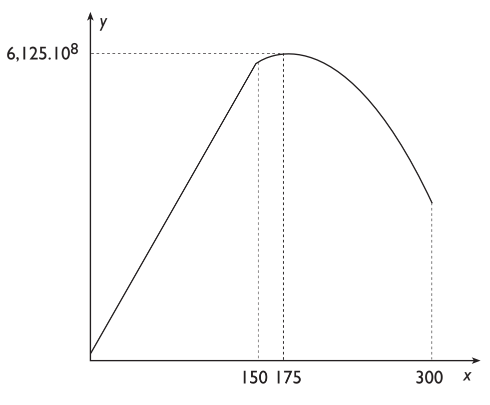
$$R'(x) = \begin{cases} 8\,000\,000 \quad , & 0 \le x < 150 \\ -40\,000\,x + 11\,000\,000 \;, & 150 < x \le 300 \end{cases}$$

$R'(x) = 0$ , $-40\,000x + 11\,000\,000 = 0$ , $x = 275$

| x | 0 | 150 | | 275 | | 300 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| R' | + | ‖ | + | 0 | - | |
| R | ↗ | | ↗ | | ↘ | |

Buna göre gelirin en yüksek olduğu turist sayısı 275 tir.

b) Şimdi de kâr fonksiyonunu ele alalım.




Şekil 7.21

$$R(x) = R(x) - C(x)$$

$$= \begin{cases} 8\,000\,000\, x - 4\,000\,000\, x \;, & 0 \le x \le 150 \\ -20\,000\, x^2 + 11\,000\,000\, x - 4\,000\,000\, \mathrm{x} \;, & 150 \le x \le 300 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4\,000\,000\, x \;, & 0 \le x \le 150 \\ -20\,000\, x^2 + 7000\,000\, x \;, & 150 \le x \le 300 \end{cases}$$

$$K'(x) = \begin{cases} 4\,000\,000 \;, & 0 \le x < 150 \\ -40\,000\, x + 7\,000\,000 \;, & 150 < x \le 300 \end{cases}$$

$K'(x) = 0$ ise $x = 175$

| $x$ | 0 | 150 | 175 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| $K'$ | + | ‖ + | 0 | - |
| $K$ | ↗ | ↗ | | ↘ |

Tablodan da gördüğünüz gibi en yüksek kâr 175 turistten elde edilmektedir. Buradan da gördüğünüz gibi en yüksek gelirin elde edildiği nokta ile en yüksek kârın elde edildiği nokta farklı olabilmektedir.

**SIRA SİZDE 5**

Dairesel dik silindir biçiminde 162 $\pi$ cm$^3$ hacimli kapalı bir kutu yapılacaktır. Kutunun 1 cm$^2$ nin maliyeti 5000 TL olduğuna göre en ucuza mal olacak kutunun maliyetini bulunuz.

## Kendimizi Sınayalım

**1.** $f(x) = -x^2 + 1$ fonksiyonu hangi aralıkta artandır?

**a.** $(-\infty, 1)$
**b.** $(-\infty, 0)$
**c.** $(-1, 1)$
**d.** $(0, \infty)$
**e.** $(1, \infty)$

**2.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde azalandır?

**a.** $(-\infty, 0)$
**b.** $(0, 1)$
**c.** $(-1, \infty)$
**d.** $(1, \infty)$
**e.** $(-\infty, \infty)$

3. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$ fonksiyonunun yerel minimum noktası aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(0, 6)$
b. $(1, 1)$
c. $\left(-\dfrac{1}{3}, 1\right)$
d. $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{202}{27}\right)$
e. $(2, -2)$

4. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$ fonksiyonunun yerel maksimum değeri kaçtır?

a. $-2$
b. $1$
c. $\dfrac{202}{27}$
d. $2$
e. $6$

**5.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x - 1}{x + 3}$ fonksiyonunun düşey asimptotunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

**a.** $x = -3$
**b.** $x = 3$
**c.** $y = -3$
**d.** $y = 3$
**e.** $x = -\dfrac{1}{3}$

**6.** $f(x) = \dfrac{2x - 3x^2}{x^2 + 6x + 5}$ fonksiyonunun yatay asimptotunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

**a.** $x = 2$
**b.** $y = 2$
**c.** $y = -3$
**d.** $x = -\dfrac{1}{3}$
**e.** $x = -1$

**7.** $x$ mal miktarı olmak üzere bir malın milyon TL cinsinden kâr fonksiyonu, $K(x) = 800x - 2x^2$ verilsin. Buna göre, bu maldan elde edilecek en yüksek kâr kaç TL dir?

**a.** 640 Milyar
**b.** 160 Milyar
**c.** 80 Milyar
**d.** 40 Milyar
**e.** 800 Milyon

**8.** x mal miktarı olmak üzere, bir malın gelir fonksiyonu, $R(x) = 15x - \dfrac{x^2}{600}$ verilsin. Buna göre, gelirin azalmaya başladığı mal miktarı kaçtır?

**a.** 4500
**b.** 3000
**c.** 600
**d.** 300
**e.** 15

**9.** $x$ mal miktarı olmak üzere, bir malın toplam maliyet fonksiyonu, $C(x) = 3000 + 60x - \dfrac{x^2}{10}$ dur. Buna göre, maliyetin en yüksek olduğu üretim miktarı kaçtır?

**a.** 30
**b.** 60
**c.** 250
**d.** 300
**e.** 450

10. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 13$ fonksiyonu hangi aralıkta aşağı bükeydir?

a. $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right]$
b. $\left[-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$
c. $(-\infty, -2]$
d. $(-2, -1)$
e. $[-1, \infty)$

**11.** Karesi ile toplamı en küçük olan gerçel sayı kaçtır?

a. $-1$
b. $-\dfrac{1}{2}$
c. $0$
d. $\dfrac{1}{2}$
e. $1$

## Biraz Daha Düşünelim

**1.** $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x - 3}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

**2.** $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz