9

Belirsiz İntegral

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *belirsiz integralin alınışını,*
- *belirsiz integralinin ekonomik uygulamalarını,*
- *belirsiz integral alma yöntemlerini öğreneceksiniz.*

İçindekiler

- *Belirsiz integral tanımı*
- *Belirsiz integral hesaplama yöntemleri*

DİKKAT

- ***Belirsiz integral ünitesine başlamadan önce türev ile ilgili üniteleri bir kere daha gözden geçirmelisiniz.***
- ***Belirsiz integral kavramını ve türevle ilişkisini iyice kavramanız gerekir.***
- ***İntegral alma kuralları için örnekleri iyi incelemeniz ve bir kere de sizin çözmeniz daha uygun olacaktır.***

Giriş

Bir işletmenin, x üretim miktarını göstermek üzere, marjinal maliyet fonksiyonunun,

$$MC = x^2 + 2x$$

olarak belirlediğini varsayalım. Firmanın toplam maliyet fonksiyonu nasıl bulunur?

Yukarıda vermiş olduğumuz probleme benzer bir çok işletme ve ekonomi probleminin çözümünde integral alma kullanılacaktır. Bu kitapta verilmemesine rağmen, olayların zaman içindeki değişimini gösteren dinamik modellerin çözümünde kullanılan Diferansiyel Denklemlerin çözümünde de integralden yararlanılır.

BELİRSİZ İNTEGRAL TANIMI

Belirsiz integral konusuna girmeden önce bir ekonomi problemini ele alarak, çözümünü inceleyelim.

ÖRNEK 1

Bir işletme, x değişkeni üretim miktarını göstermek üzere, marjinal maliyet fonksiyonunu,

$$MC = f(x) = 4x + 4$$

olarak belirlemiştir. Verilen marjinal maliyet fonksiyonunundan yararlanarak bu işletmenin, sabit maliyetler 50 000 TL. olmak üzere, 100 birimlik üretiminin toplam maliyetini bulunuz.

ÇÖZÜM

Türevle ilgili ünitelerde marjinal maliyet fonksiyonunun, **toplam maliyet fonksiyonunun** üretim miktarı olarak olan x değişkenine göre birinci türevi olduğu açıklanmıştı. Toplam maliyet fonksiyonu $F(x)$ ise, $F(x)$ in türevi **marjinal maliyet** fonksiyonu olan $f(x)$ olacaktır. Böylece,

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

olur. Bu ilişki örnekte verilen verilere uygunalırsa,

$$\frac{dF(x)}{dx} = 4x + 4$$

eşitliği bulunur. Türevle ilgili verilerden, türevi $f(x) = 4x + 4$ olan bir $F(x)$ fonksiyonu, sabit farkıyla,

$$F(x) = 2x^2 + 4x$$

olarak bulunur. Türevi $4x + 4$ olan fonksiyonlardan bazıları, sabitin türevinin sıfır olduğu gözönüne alınarak, aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$F_1(x) = 2x^2 + 4x + 5\ , \qquad F'_1(x) = 4x + 4$$
$$F_2(x) = 2x^2 + 4x - 100\ , \qquad F'_2(x) = 4x + 4$$

Yukarıdaki örneklerde olduğu gibi, türevi $4x + 4$ olan fonksiyonlar biribirinden **sabitlerle** ayrılmaktadır. Fonksiyonlardaki sabit yerine genel bir sabit olan c koyulursa,

$$F(x) = 2x^2 + 4x + c$$

olur. Toplam maliyet fonksiyonundaki c sabiti, üretimin olmadığı durumdaki sabit maliyeti göstermektedir. Örneğimizdeki toplam maliyet fonksiyonu olan $F(x)$ de $x = 0$ olarak alındığında,

$$F(0) = c = 50\ 000$$

olarak bulunur. Buradan $x = 100$ birimlik üretim için toplam maliyet,

$$F(100) = 2\ (100)^2 + 4.100 + 50\ 000 = 70\ 400$$

olacaktır.

Belirsiz integral ile maliyet fonksiyonları arasında ilişkiler vardır. Bu ilişkiler, bizi belirsiz integral tanımına götürecektir.

Vermiş olduğumuz örnekteki yöntem genelleştirilerek belirsiz integral tanımı aşağıdaki şekilde yapılabilir.

Bir $f(x)$ fonksiyonu için,

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

olacak şekilde bir $F(x)$ fonksiyonu varsa, $F(x) + c$ fonksiyonlarına, $f(x)$ in ters türevleri veya **belirsiz integrali** denir ve bu durum,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlik "$f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integralinin $F(x) + c$" olduğunu gösterir.

Belirsiz integral, türevi verilen fonksiyonları bulma işlemidir. Bu işleme ters türev de denir. Türevi eşit fonksiyonlar birbirinden integral sabiti denilen c sabitiyle ayrılırlar.

Burada $\int$ simgesine integral işareti, $f(x)$ fonksiyonuna **integrant** veya **integral altı** denilir. Bu ifadeye belirsiz integral denilmesinin nedeni $F(x) + c$ fonksiyonlarının kesin tanımlı olmayışı, bir fonksiyon ailesini göstermesindendir. $F(x)$ fonksiyonlarını biribirinden ayıran ***c* sabitine integral sabiti** denir.

İntegral tanımındaki dx diferansiyeli integralin hangi değişkene göre alındığını göstermektedir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

İntegral tanımındaki dx diferansiyeli, integralin hangi değişkene göre alınacağını göstermektedir.

$\int 3x\,dx$ integrali, $3x$ fonksiyonunun x e göre integralinin alınacağını göstermektedir.

$\int 4y^2x\,dx$ integrali, $4y^2x$ fonksiyonunun x e göre integralinin alınacağını göstermektedir.

$\int 4y^2x\,dy$ integrali, $4y^2x$ fonksiyonunun y ye göre integralinin alınacağını göstermektedir.

$\int (2t^2y + t + 1)dt$ integrali, $(2t^2y + t + 1)$ fonksiyonunun t ye göre integralinin alınacağını göstermektedir.

TEMEL İNTEGRAL KURALLARI

Temel integral alma kurallarını anlayabilmeniz için türev konusuna yeniden bakmanız yararlı olacaktır.

Bu kısımda türev alma kurallarından yararlanarak integral alma kurallarını açıklayacağız.

1) $\int a\,dx = ax + c$

2) $n \neq -1$ için $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3) $n = -1$ için $\int x^{-1} dx = \int \left(\dfrac{1}{x}\right) dx = \ln|x| + c \ , \ x \neq 0$

4) $\int e^x dx = e^x + c$

5) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c, \ \ a > 0$

Yukarıda verilen temel integral formülleri, integral alma sonucu bulunan fonksiyonun türevinin integrali alınacak fonksiyonu verip vermediğine bakılarak doğrulanabilir. Şöyle ki:

1) $F(x) = ax + c$ ise $F'(x) = a$ olur.

2) $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ise $F'(x) = \dfrac{(n+1)\,x^{n+1-1}}{n+1} = x^n$ olur.

3) $F(x) = \ln|x| + c$ ise $F'(x) = \dfrac{1}{x}$ olur. $x \neq 0$

4) $F(x) = e^x + c$ ise $F'(x) = e^x$ olur.

5) $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$, ise $F'(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} \cdot \ln a = a^x$ olur.

Yandaki doğrulamalar integralin ters türev olduğunu göstermektedir.

Şimdi yukarıda vermiş olduğumuz kurallar için birer örnek verelim. Siz de ikinci taraftaki fonksiyonların türevlerini alarak integrali alınan fonksiyonları verip vermediğini kontrol ediniz.

$$\int 3dx = 3x + c \qquad \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \qquad \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c \qquad \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + c$$

$$\int 2y\,dy = y^2 + c \qquad \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$$

Türev yardımı ile doğrulamaları siz de yapınız.

Yukarıda verilen temel integral kuralları türev ile ilgili ünitelerde verilen türev alma kuralları yardımıyle daha da geliştirilebilir.

Buna göre, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları, sırasıyle $F(x)$ ve $G(x)$ in türevleri olan fonksiyonlar ise,

$$\frac{d}{dx}\left[F(x) + G(x)\right] = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}G(x) = f(x) + g(x)$$

olduğundan,

$$\int \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int d\big(F(x) + G(x)\big)$$

$$= F(x) + G(x) + c$$

$$= \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

olur. O halde kural olarak, iki fonksiyonunun toplamlarının integrali, bunların ayrı ayrı bulunan integralleri toplamına eşit olacağını söyleyebiliriz.

$$\int \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Birden fazla fonksiyonun toplamlarının türevi, bu fonksiyonların ayrı ayrı bulunan türevleri toplamına eşittir. Bu kuralın sonucu olarak da, birden çok fonksiyonun toplamlarının integralini fonksiyonların ayrı ayrı bulanan integralin taplamına eşit olduğu bulunur.

Sabitle bir fonksiyonun çarpımının integrali de, türev kuralları yardımiyle, fonksiyonun integrali ile sabitin çarpımına eşittir.

$$\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

şeklinde gösterilir.

Bir sabitle bir fonksiyonun çarpımının türevi, fonksiyonun türevi ile sabitinin çarpımına eşit olduğunu hatırlayınız. Verdiğimiz kural da türev kuralının bir sonucudur.

SIRA SİZDE 1

Yukarıda verilen kurallar yardımıyla aşağıdaki integrallerin nasıl alındığını inceleyiniz.

Örnekteki integralleri alırken, integral işleminden önce basitleştirme işlemlerini yapmak problemlerin çözümünü kolaylaştıracaktır.

1) $\int (2x^2 - 4x + 6)\,dx = 2\int x^2dx - 4\int xdx + 6\int dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 6x + c$

2) $\int (6x^2 - 2x + 8)\,dx = 6\int x^2dx - 2\int xdx + 8\int dx = 2x^3 - x^2 + 8x + c$

3) $\int (e^y + y^2)\,dy = \int e^y dy + \int y^2 dy = e^y + \frac{y^3}{3} + c$

4) $\int (3t^3 + 2t^2 + 3)\,dt = 3\int t^3dt + 2\int t^2dt + 3\int dt = \frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} + 3t + c$

5) $\int 2\left(\frac{1}{x}\right) dx = 2\int \left(\frac{1}{x}\right)dx = 2\ln|x| + c = \ln x^2 + c$

6) $\int \left(\frac{x^4 + x - 1}{x}\right) dx = \int \left(\frac{x^4}{x}\right) dx + \int \left(\frac{x}{x}\right) dx - \int \left(\frac{1}{x}\right) dx$

$= \int x^3dx + \int dx - \int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^4}{4} + x - \ln|x| + c$

Temel integral alma kuralları yardımıyla aşağıdaki integrallerin nasıl alındığını inceleyiniz. Bu integrallerde, üstel ve köklü ifadelerin bulunduğu integrallerin nasıl alınacağı gösterilmiştir.

Bu örneklerde köklerin kuvvet şeklinde yazılmaları çok önemlidir. İntegralleri önce alınız ve sonra cevapla karşılaştırınız.

$$\int (6.5^x - 2e^x + x - 1)\,dx = 6.\frac{5^x}{\ln 5} - 2e^x + \frac{x^2}{2} - x + c$$

$$\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int (x^{1/3} + x^{-1/2})\,dx = \frac{3x^{4/3}}{4} + 2x^{1/2} + c = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + c$$

$$\int \left(\sqrt[4]{x^3} + \frac{x}{\sqrt[3]{x}} + 2\right) dx = \int (x^{3/4})\,dx + \int x^{2/3}\,dx + 2\int dx$$

$$= \frac{4x^{7/4}}{7} + \frac{3x^{5/3}}{5} + 2x + c$$

$$= 4x\sqrt[4]{x^3} + \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + 2x + c$$

ÖRNEK 2

Bir işletmede x üretim miktarına bağlı olarak marjinal maliyet fonksiyonu,

$MC(x) = x + 50e^x$

ve sabit maliyet 250 000 birim ise, toplam maliyet fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Önce verilen 1. Örnek incelenirse marjinal maliyet fonksiyonunun integralinin toplam maliyet fonksiyonunu vereceği görülür. Başka bir ifadeyle,

$$TC(x) = \int (x + 50\,e^x)\,dx = \int xdx + 50\int e^x dx = \frac{x^2}{2} + 50\,e^x + c$$

olur. Üretim miktarının sıfır olduğu noktadaki maliyetin sabit maliyeti göstereceğini biliyorsunuz. Buradan,

$TC(0) = 50.e^0 + c = 250\ 000$ ve

$c = 250\ 000 - 50 = 249\ 950$ olur. Böylece toplam maliyet fonksiyonu,

$$TC(x) = \frac{x^2}{2} + 50\,e^x + 249\ 950$$

olur.

Ekonomide, marjinal maliyet fonksiyonu verildiğinde toplam maliyet fonksiyonunu bulmada kullanılan yöntemden, üretim miktarına bağlı olarak verilen marjinal kâr fonksiyonundan toplam kâr fonksiyonu bulunabilir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyiniz.

Ekonomide marjinal maliyet fonksiyonu verildiğinde toplam maliyet fonksiyonunu, marjinal kâr fonksiyonu verildiğinde de toplam kâr fonksiyonu bulunabilir. Bu hesaplama yöntemi integral almadır.

ÖRNEK 3

Bir işletmede x üretim miktarına bağlı olarak marjinal kâr fonksiyonu,

$$K'(x) = 100x - 5000$$

olarak belirlenmiştir. İşletmede üretim yapılmadığında zarar 25000 birim ise, toplam kâr fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Marjinal kâr fonksiyonunun integrali toplam kâr fonksiyonunu vereceğinden, toplam kâr fonksiyonunu,

$$K(x) = \int (100x - 5000)\,dx = 50x^2 - 5000x + c$$

olur. Üretim yapılmadığında, $x = 0$ olacağından,

$K(0) = c = -25000$ birim olarak bulunur. Böylece toplam kâr fonksiyonu,

$$K(x) = 50x^2 - 5000x - 25000$$

olacaktır.

Bir işletmede talep miktarı x birim, üretilen malın satış fiyatı p olmak üzere, talep fonksiyonu,

$$p = f(x)$$

olacaktır. Başka bir deyimle, bir işletmenin ürettiği malların tamamını sattığı durumda, talep miktarı üretim miktarına eşit ve malın fiyatı da üretim miktarının bir fonksiyonu olmaktadır. Bu fonksiyona, yukarıda fonksiyon şeklinde ifade edildiği gibi, **talep fonksiyonu** denir.

Bu örneğin çözümünde Gelir = Fiyat . Miktar olduğu unutulmamalıdır.

İşletmenin toplam gelir fonksiyonu,

$$R(x) = x.p = x\,f(x)$$

olur.

Toplam gelir fonksiyonunun türevi marjinal gelir fonksiyonunu verecektir.

$$R'(x) = f(x) + x.\,f'(x)$$

Toplam gelir fonksiyonunun türevinin marjinal gelir fonksiyonu olduğunu unutmayınız. Bu sonuç bir çok ekonomik problemin çözülmesinde kullanılır.

Eğer işletmenin, x üretim miktarına bağlı olarak, marjinal gelir fonksiyonu biliniyorsa, toplam gelir fonksiyonu,

$$R(x) = \int R'(x)\,dx$$

olarak bulunur. Böylece toplam gelir fonksiyonu, c sabit geliri göstermek üzere,

$$\int R'(x)\,dx = R(x) + c$$

olarak bulunur.

Yukarıda yapılan açıklamalar ile aşağıdaki örnek arasındaki ilişkiyi kurunuz.

ÖRNEK 4

Bir işletmenin, x üretim miktarını göstermek üzere, marjinal gelir fonksiyonu,

$$R'(x) = 10 - 2x - x^2$$

ise toplam gelir fonksiyonu ne olur?

ÇÖZÜM

$$R(x) = \int MRdx = \int \left(10 - 2x - x^2\right) dx = 10x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c = 10x - x^2 - \frac{x^3}{3} + c$$

Üretim yapılmadığında, gelir sıfır olacağı için burada $c = 0$ olacak ve dolayısıyle bu işletme için toplam gelir fonksiyonu,

$$R(x) = 10x - x^2 - \frac{x^3}{3}$$

olur.

ÖRNEK 5

Bir kentin nüfusunun, t yıl olarak zamanı göstermek üzere,

$$p'(t) = 6000 + 9000\sqrt{t}$$

bağıntısıyle büyüdüğü belirlenmiştir. Kentin şu andaki nüfusu 500 000 kişi ise, 4 yıl sonraki nüfusu ne olur?

ÇÖZÜM

Kent nüfusunun büyümesini gösteren,

$$p'(t) = 6000 + 9000\sqrt{t}$$

fonksiyonunun integrali alınarak, t yıl sonraki nüfusu,

$$p(t) = \int p'(t)\,dt = 6000t + 6000t\sqrt{t} + 500\,000$$

fonksiyonu ile belirlenir. $t = 4$ için,

$$p(4) = 6000.4 + 6000.4\sqrt{4} + 500\,000 = 572\,000$$

olacaktır.

BELİRSİZ İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ

Bu kesimde, belirsiz integral hesaplarında en çok kullanılan üç yöntemi tanıtacağız. Bu yöntemler değişken dönüşümü, kısmi integrasyon ve basit kesirlere ayırma teknikleri olarak adlandırılır.

Değişken Dönüşümü İle İntegral Alma

Değişken dönüşümü ile integral alma yöntemini bir örnek üzerinde açıklayarak genelleştireceğiz.

ÖRNEK 6

$\int (x^2 - 1)^{20} x dx$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyondaki $(x^2 - 1)^{20}$ ifadesinin açılarak integralin alınması çok uzun işlemler gerektirmektedir. Bu uzun işlemleri ortadan kaldırarak integrali alınacak fonksiyonu basitleştirmek için değişkeni dönüştüreceğiz.
İntegrali alınacak fonksiyonda $(x^2 - 1)$ yerine yeni bir değişken olarak,

$$u = x^2 - 1$$

değişkenini koyalım. Dönüşümle verilen fonksiyonunun x e göre türevini alalım ve buradan da dx diferansiyelini bulalım.

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{du}{2x} = dx$$

Bulduğumuz bu değerleri integrali alınacak fonksiyonda yerine koyalım.

$$\int (x^2 - 1)^{20} x dx = \int u^{20} . x . \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int u^{20} du$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{u^{21}}{21} + c = \frac{1}{42} u^{21} + c = \frac{1}{42} (x^2 - 1)^{21} + c$$

Bu örnekte uygulanan değişken dönüşümü ile integral alma yöntemi için aşağıdaki genel ilke verilecektir.

Çözümde bulduğunuz integralin U' ya bağlı olarak alınacağını du diferansiyeli göstermektedir.

Kural incelendiğinde değişkenin ve buna bağlı olarak diferansiyelin nasıl dönüştürüldüğünü görmek çok önemlidir Genelde integrali alınacak fonksiyondaki parantez içerisi, kök içerisi veya bir üs u olarak alınır.

- u değişkeni $u = g(x)$ şeklinde seçiniz. Genelde, integrali alınacak fonksiyondaki parantez içerisi, kök içerisi veya bir üs u olarak alınır.
- $\frac{du}{dx} = g'(x)$ ve buradan $\frac{du}{g'(x)} = dx$ diferansiyeli bulunur.
- $u = g(x)$ ve $\frac{du}{g'(x)} = dx$ değerleri integral alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa, içerisinde x değişkeni yerine u değişkenine bağlı integrali alınacak bir fonksiyon bulunur. Eğer, yapılan dönüşüm sonucunda içerisinde x değişkeni bulunan bir fonksiyon bulunursa başka bir dönüşüm uygulanır.
- Dönüşüm sonucunda u ya bağlı olarak bulunan fonksiyonun integrali u ya göre alınacaktır. Alınan integralde u yerine $u = g(x)$ değeri konulur.

Vermiş olduğumuz değişken dönüşümü yöntemi ile alınacak integral örnekleri vereceğiz.

ÖRNEK 7

$\int (x^3 + 1)^{10} x^2 dx$ ***integralini alınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonda $(x^3 + 1)$ ifadesi yerine u değişkeni alınırsa,

$$u = x^3 + 1 \ , \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

değerleri bulunur. Bulunan değerler integraldeki fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int (x^3+1)^{10} x^2 dx = \int u^{10} . x^2 . \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int u^{10} . du = \frac{1}{3} . \frac{u^{11}}{11} + c$$

$$= \frac{1}{33}(x^2+1)^{11} + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 8

$\int \frac{xdx}{(x^2+2)^4}$ ***integralini alınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonda parantezin içerisindeki $(x^2 + 2)$ ifadesi u olarak alınacaktır.

$$u = x^2 + 2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2x} = dx$$

Bulunan değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int \frac{xdx}{(x^2+2)^4} = \int \frac{x}{u^4} . \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^{-4}.du$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{u^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{6} . \frac{1}{(x^2+2)^3} + c$$

bulunur.

ÖRNEK 9

$\int \frac{xdx}{x^2+3}$ ***integralini hesaplayınız..***

ÇÖZÜM

$u = x^2 + 3$ olarak alındığında,

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$

olur. Bu değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int \frac{xdx}{x^2+3} = \int \frac{x}{u} . \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|\,u| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + c$$

sonucu bulunur.

Bu örnekteki integralin alınmasında logaritmik fonksiyonun türevinden yararlanıldığını görünüz.

ÖRNEK 10

$\int e^{3x+6} . dx$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$u = 3x + 6$ olarak alınırsa,

$$\frac{du}{dx} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{3} = dx$$

değerleri bulunur. Bulunan değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int e^{3x+6}\, dx = \int e^u . \frac{du}{3} = \frac{1}{3} e^u + c = \frac{1}{3} e^{3x+6} + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 11

$\int x . \sqrt{x^2 + 2}\, dx$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonda $u = x^2 + 2$ olarak alınırsa,

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{du}{2x} = dx$$

değerleri bulunur. Bulunan değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int x\sqrt{x^2+2}\, dx = \int x .\ u^{1/2} . \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\, du = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} u\sqrt{u} + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2} + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 12

$\int e^{x^2+1} . xdx$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$u = x^2 + 1$ alınırsa,

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{du}{2x} = dx$$

değerleri bulunur. Bulunanlar integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int e^{x^2+1} . xdx = \int e^u .\ x . \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int e^u\, du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 13

$\int \frac{e^{2x}\, dx}{2 + e^{2x}}$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonda $u = 2 + e^{2x}$ olarak alınırsa,

$$\frac{du}{dx} = 2e^{2x} \Rightarrow dx = \frac{du}{2e^{2x}}$$

değerleri bulunur. Bulunan değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int \frac{e^{2x}\, dx}{2 + e^{2x}} = \int \frac{e^{2x}}{u} . \frac{du}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln\left(2 + e^{2x}\right) + c$$

sonucu bulunur.

SIRA SİZDE 2

Örneklerdeki integralleri alırken önce değişkenin nasıl dönüştürüldüğüne dikkat ediniz.

Aşağıdaki integralleri alarak ikinci tarafla karşılaştırınız.

1) $\int (5x+3)^2\,dx = \frac{1}{15}(5x+3)^3 + c, \qquad (u = 5x+3)$

2) $\int (1-2x)^5\,dx = -\frac{1}{12}(1-2x)^6 + c, \qquad (u = 1-2x)$

3) $\int \sqrt{3x+5}\,dx = \frac{2}{9}(3x+5)\sqrt{3x+5} + c, \qquad (u = 3x+5)$

4) $\int \frac{2x\,dx}{x^2+5} = \ln(x^2+5) + c, \qquad (u = x^2+5)$

5) $\int e^{8x}dx = \frac{1}{8}e^{8x} + c, \qquad (u = 8x)$

6) $\int 2x\,.\,e^{x^2-1}\,dx = e^{x^2-1} + c, \qquad (u = x^2-1)$

7) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x)^4} = -\frac{1}{3(x^2+x)^3} + c, \qquad (u = x^2+\mathrm{x})$

8) $\int \frac{\ln|x+1|\,dx}{x+1} = \frac{1}{2}\left[\ln|x+1|\right]^2 + c, \qquad (u = \ln|x+1|)$

Kısmi İntegral Alma Yöntemi

u ve v, x değişkenine bağlı ve bu değişkene göre türevlenebilir iki fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun çarpımlarının x e göre türevleri alınırsa,

$$\frac{d}{dx}(u\,.\,v) = u\,.\,\frac{dv}{dx} + v\,.\,\frac{du}{dx}$$

bulunur. Diferansiyelleri kullanarak,

$$d(uv) = udv + vdu$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafındaki ifadelerin integralleri alınırsa,

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

veya

$$uv = \int udv + \int vdu$$

u.v şeklinde *x* e bağlı iki fonksiyonun çarpımlarının türevinden yararlanılarak

$$\int udv = uv - \int vdu$$

şeklinde belirlenen kısmi integral formülü bulunur.

eşitliği bulunur. Son eşitlikteki $\int udv$ terimi yalnız bırakılırsa, kısmi integral alma yönteminde kullanılacak formül bulunur.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Kısmi integral yöntem uyguanması için *dv* integrali en kolay alınabilen ve aynı zamanda,

$$\int vdu$$

integralinin kolayca alınmasını sağlayan fonksiyon olarak seçilmelidir.

Formülde çarpım şeklinde verilen udv ifadesindeki çarpanlardan dv olarak integrali en kolay alınabilen ve aynı zamanda $\int vdu$ integralinin kolayca alınmasını sağlayan fonksiyon seçilmelidir. Eğer, dv olarak seçilen fonksiyon ikinci taraftaki integralin alınmasını kolaylaştırmıyorsa, dv olarak diğer çarpan seçilir.

Aşağıda vereceğimiz örnekleri dikkatle incelerseniz bu seçimi kolayca yapar ve integrali hesaplayabilirsiniz.

ÖRNEK 14

$\int x e^x dx$ ***integralini kısmi integral alma yöntemiyle hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Kısmi integral alma yöntemiyle bu integrali almak için önce $x.e^x dx$ çarpımında hangi çarpanın u, hangi çarpanın dv olarak seçilmesi gerektiği belirlenmelidir. Burada $dv = e^x dx$, $u = x$ olarak alınırsa,

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$
$$x = u \Rightarrow dx = du$$

olarak bulunur. Bulunan değerler kısmi integral alma formülünde yerlerine koyulursa,

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$
$$\downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow$$
$$\int u\, dv = u.\, v - \int v\, du$$
$$= x e^x - e^x + c$$

bulunur.

ÖRNEK 15

$\int x \ln x\, dx$ ***integralini kısmi integral alma yöntemiyle hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonun çarpanlarından biri olan $\ln x$ fonksiyonunun integrali kolaylıkla alınamaz. O halde dv olarak xdx çarpanı seçilirse,

$$dv = xdx \Rightarrow \int dv = \int xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$
$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

değerleri bulunur. Bulunan değerler kısmi integral alma formülünde yerlerine konulursa,

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} . \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int xdx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} . \frac{x^2}{2} + c$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$$

bulunur.

ÖRNEK 16

$\int \ln x\, dx$ ***integralini kısmi integral alma yöntemiyle hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonun çarpanlarından $\ln x$ fonksiyonunu u, dx ise dv olarak alınacaktır.

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

Bulunan değerler yerlerine konulursa,

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 17

$\int (\ln x)^2 dx$ ***integralini kısmi integral alma yöntemiyle hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$$u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2\ln x.\frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2.\ln x.\frac{1}{x}x\, dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\, dx = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c$$ olur.

$\int \ln x\, dx$ integralinin bir önceki örnekte hesaplandığına dikkat ediniz.

ÖRNEK 18

$\int \frac{1}{x^2}\ln x\, dx$ ***integralini kısmi integral alma yöntemiyle hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$$dv = \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

Bu değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int \frac{1}{x^2}\ln x\, dx = -\frac{1}{x}\ln x - \int \left(-\frac{1}{x}\right).\frac{1}{x}dx$$

$$= -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 19

$\int \ln|x+1|\,dx$ ***integralini kısmi integral alma yöntemiyle hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$

$u = \ln|x+1| \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x+1}dx$

Bu değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int \ln|x+1|\,dx = x\ln|x+1| - \int \frac{x}{x+1}dx$$

$$= x\ln|x+1| - \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= x\ln|x+1| - x + \ln|x+1| + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 20

$\int x^4 \ln 10x\,dx$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonunun çarpanlarından $\ln 10x$ ifadesi u, x^4dx ifadesi de dv olarak alınırsa,

$dv = x^4dx \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{x^5}{5}$

$u = \ln 10x \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x}dx$

Bulunan değerler yerlerine konulursa,

$$\int x^4 \ln 10x\,dx = \frac{x^5}{5}\ln 10x - \int \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^5}{5}\ln 10x - \frac{x^5}{25} + c$$

bulunur.

Basit Kesirlere Ayırma Yöntemiyle İntegral Alma

a lar sabit ve $n \geq 0$ tamsayı olmak üzere,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\, a_{n-1}x + a_n$$

şeklinde x in kuvvetlerine göre düzenlenmiş bir ifadeye polinom denildiğini biliyorsunuz.

Bir polinomun $ax+b$ şeklinde birinci dereceden ax^2+bx+c şeklinde ikinci dereceden çarpanları olabilir.

$f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

x in pozitif tamsayı olan kuvvetlerine göre düzenlenmiş ifadelere polinom denir. $f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

şeklindeki fonksiyona rasyonel fonksiyon denir. Burada bir rasyonel fonksiyonun basit kesirler şeklinde nasıl ifade edileceği açıklanacaktır.

şeklindeki fonksiyona rasyonel fonksiyon denir. Rasyonel fonksiyonda paydaki fonksiyonunun derecesi paydadaki polinomun derecesinden küçük ise bu kesir basit kesirdir. Eğer paydaki polinomun derecesi paydadaki polinomun derecesinden büyük veya eşit ise, verilen kesirin payındaki polinom paydasındaki polinoma bölünerek verilen fonksiyon bir polinom ile bir basit kesirin toplamı şeklinde ifade edilebilir.

Örnek olarak $\dfrac{x^2}{x-1}$ fonksiyonunu ele alalım.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x-1 \\ \cline{2-2} \mp x^2 \pm x & x+1 \\ \cline{1-1} x & \\ \mp x \pm 1 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Böylece $\dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ olur.

Bu rasyonel fonksiyonun integralini alalım.

$$\int \left(x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln |x-1| + c$$

Bir rasyonel fonksiyonun paydasındaki polinomun biribirinden farklı $ax + b$ şeklinde birinci dereceden çarpanları varsa, çarpanların her biri için,

$$\frac{A}{ax+b}$$

şeklinde basit kesirler yazılır ve bu kesirler toplanarak rasyonel fonksiyona özdeş kılınır.

ÖRNEK 21

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Paydadaki polinom, $(x^2 - 1) = (x-1)(x+1)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

$$\frac{1}{x^2-1} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

İkinci taraftaki kesirlerin paydaları eşitlenirse ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$1 \equiv A(x+1) + B(x-1)$$
$$1 \equiv (A+B)x + A - B$$

özdeşlikleri bulunur. Özdeşliğin ikinci tarafı x li terimin katsayısı birinci taraftaki x li terim olmadığı için katsayı sıfır olacaktır.

$$A + B = 0$$
$$A - B = 1$$

Bu iki denklem ortak çözülürse $A = \dfrac{1}{2}$ ve $B = -\dfrac{1}{2}$ olarak bulunur. Böylece

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}$$

olur. İntegral alınırsa,

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

$$= \ln\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} + c$$

bulunur.

ÖRNEK 22

$\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$ ***integralini alınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak rasyonel fonksiyonun paydasındaki polinom çarpanlarına ayrılırsa, $x^2+7x+6=(x+1)(x+6)$ bulunur.

$$\frac{1}{x^2+7x+6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+6}$$

Eşitliğin ikinci tarafındaki kesirlerin paydaları eşitlenir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$1 \equiv A(x+6) + B(x+1)$$
$$1 \equiv (A+B)x + 6A + B \quad \Rightarrow \quad A+B=0\ ,\ \ 6A+B=1$$

denklem sistemi bulunur. Bu iki denklemin ortak çözümünden

$A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$ bulunur.

$$\frac{1}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{5}\frac{1}{x+6}$$

İntegral alınırsa

$$\int \frac{1}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+6}$$

$$= \ln\sqrt[5]{\left|\frac{x+1}{x+6}\right|} + c$$

olur.

ÖRNEK 23

$\int \frac{x^2dx}{x^2-4}$ ***integralini alınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak rasyonel fonksiyonun payındaki polinomun derecesi paydasındaki polinomun derecesinden büyük veya eşit ise; pay paydaya bölünerek verilen fonksiyon bir polinom ile bir basit kesirin toplamı şeklinde ifade edilir.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2-4 \\ \cline{2-2} \mp x^2 \pm 4 & 1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$\frac{x^2}{x^2-4} \equiv 1 + \frac{4}{x^2-4}$$

Özdeşlikteki $\frac{4}{x^2-4}$ fonksiyonu yukarıda açıklandığı gibi basit kesirlere ayrılabilir.

$$\frac{4}{x^2-4} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

İkinci taraftaki kesirlerin paydaları eşitlenip gerekli düzenlemeler yapılırsa, $4 \equiv (A+B)x + 2A - 2B$ özdeşliği bulunur. Özdeşliğin iki tarafındaki benzer terimlerin katsayılarının eşitliğinden,

$$A + B = 0$$
$$2A - 2B = 4$$

denklem sistemi bulunur. Bulunan iki denklem iki bilinmeyenden oluşan denklem sisteminin ortak çözümünden $A = 1$, $B = -1$ bulunur. Verilen rasyonel fonksiyonunun integrali alınırsa,

$$\int \frac{x^2dx}{x^2-4} = \int dx + \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= x + \ln|x-2| - \ln|x+2| + c$$

$$= x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$$

bulunur.

DİKKAT

İntegrali alınacak rasyonel ifadelerin paydasındaki çarpanların biçimi önemlidir.

İntegrali alınacak rasyonel fonksiyonun paydasındaki polinomun $ax + b$ şeklinde birinci derece ifadelerin tekrarlanmış çarpanları varsa, A lar bulunması gereken sabitler olmak üzere (n) kere tekrarlanmış bir çarpan için,

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

şeklinde n tane basit kesirin toplamı yazılır.

ÖRNEK 24

$\int \frac{(x+1)\,dx}{(x-1)^2}$ ***integralini alınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak rasyonel fonksiyonunun paydasındaki $(x-1)$ çarpanı iki kere tekrarlanmıştır. Bu nedenle,

$$\frac{x+1}{(x-1)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

özdeşliği yazılıp, ikinci tarafın paydaları eşitlenirse, $x + 1 \equiv A(x - 1) + B$ özdeşliği ve buradan da, $x + 1 \equiv Ax - A + B$ özdeşliği bulunur. Özdeşliğin her iki tarafındaki benzer terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$$A = 1$$
$$-A + B = 1$$

denklem sistemi bulunur. Bulunan sistemin çözümünden $A = 1$, $B = 2$ değerleri bulunur.

$$\frac{x+1}{(x-1)^2} \equiv \frac{1}{x-1} + 2 \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

İntegral alınırsa,

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{(x-1)^2} = \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \ln|x-1| - \frac{2}{(x-1)} + c$$

bulunur.

ÖRNEK 25

$\int \frac{(2x^2-1)\,dx}{x^3+x^2}$ ***integralini alınız.***

ÇÖZÜM

Verilen rasyonel fonksiyonun paydasındaki polinom, $x^3 + x^2 \equiv x^2(x+1)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır. Burada x çarpanı iki kere tekrarlanmıştır.

$$\frac{(2x^2-1)}{x^3+x^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

İkinci tarafın paydaları eşitlenirse,

$$2x^2 - 1 \equiv x(x+1)A + (x+1)B + x^2 C$$
$$\equiv (A + C)x^2 + (A + B)x + B$$

özdeşliği bulunur. Özdeşliğin iki tarafındaki benzer terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$$A + C = 2$$
$$A + B = 0$$
$$B = -1$$

denklem sistemi bulunur. Sistemin ortak çözümünden, $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ değerleri bulunur. İntegrali alınırsa,

$$\int \frac{(2x^2-1)\,dx}{x^3+x^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x+1| + c$$

$$= \ln|x(x+1)| + \frac{1}{x} + c$$

sonucu bulunur.

Kendimizi Sınayalım

1. $\int \frac{6xdx}{3x^2-10}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\ln|3x^2-10|+c$

b. $\ln|x^2-10|+c$

c. $\ln|3x^2+10|+c$

d. $6\ln|x^2-2|+c$

e. $\frac{1}{2}\ln(x^3+3)+c$

2. $\int e^{3x^3}.\,x^2dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $e^{3x^3}+c$

b. $\frac{1}{3}e^{3x^3}+c$

c. $\frac{1}{2}e^{3x^3}+c$

d. $\frac{1}{9}e^{3x^3}+c$

e. $e^{x^3}+c$

3. $\int (x^2+2x)^5.(x+1)\,dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\frac{(x^2+2x)^6}{12}+c$

b. $\frac{(x^2+2x)^5}{10}+c$

c. $\frac{(x^2+2x)^6}{6}+c$

d. $\frac{(x^2+2x)^4}{4}+c$

e. $\frac{(x^2+2x)^6}{18}+c$

4. $\int x^2\ln x dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+c$

b. $\frac{x^3}{3}\ln x+\frac{x^3}{3}+c$

c. $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{18}+c$

d. $\frac{x^3}{3}\ln x+\frac{x^3}{9}+c$

e. $\frac{x^3}{9}\ln x+\frac{x^3}{3}+c$

5. $\int e^{-2x}dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\frac{1}{2}e^{-2x}+c$

b. $\frac{1}{3}e^{-2x}+c$

c. $-\frac{1}{2}e^{-2x}+c$

d. $-\frac{1}{3}e^{-2x}+c$

e. $\frac{1}{4}e^{-2x}+c$

6. $\int e^{x^2}.\,xdx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

b. $-\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

c. $e^{x^2}+c$

d. $e^{x^2-1}+c$

e. $\frac{1}{8}e^{x^2}+c$

7. $\int e^{\frac{1}{x}}.\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}}+c$

b. $-e^{\frac{1}{x}}+c$

c. $2e^{\frac{1}{x}}+c$

d. $e^{-\frac{1}{x}}+c$

e. $\frac{1}{e^x}+c$

8. $\int \frac{(\ln x)^5dx}{x}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\frac{(\ln x)^5}{5}+c$

b. $\frac{(\ln x)^6}{6}+c$

c. $\frac{(\ln x)^2}{3}+c$

d. $\frac{(\ln x)^4}{4}+c$

e. $\frac{\ln x}{6}+c$

9. x üretim miktarını göstermek üzere, bir firmanın marjinal gelir fonksiyonu, $R'(x) = 40\,000 - 2x$ olarak belirlenmiştir. Buna göre, bu firmanın toplam gelir fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a. $40\,000 - x^2$

b. $40\,000x - x^2$

c. $40\,000x + x^2$

d. $40\,000x - 3x$

e. x^2

10. x üretim miktarını göstermek üzere, bir firmanın marjinal maliyet fonksiyonu, $C'(x) = 8x + 100$ olarak belirlenmiştir. Firmanın 40 birim üretim için toplam maliyet 80 bin birim ise, toplam maliyet fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a. $4x^2 + 100x + 60.000$

b. $4x^2 + 100x + 69.600$

c. $4x^2 + 10x + 69.000$

d. $4x^2 + 100x + 70.000$

e. $4x^2 + 100x$

11. x üretim miktarını göstermek üzere, bir firmada marjinal kâr fonksiyonu, $P'(x) = 2x + 500$ olarak belirlenmiştir. Firmada 100 birimlik üretim için toplam kâr 20 bin birim ise, toplam kâr fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a. $-x^2 + 500x - 20\,000$

b. $-x^2 + 500x + 20\,000$

c. $x^2 + 500$

d. $x^2 + 500x - 30\,000$

e. $-x^2 - 500x + 20\,000$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\ln \sqrt[3]{\frac{x-3}{x+3}} + c$

b. $\ln \sqrt[4]{\frac{x-3}{x+3}} + c$

c. $\ln \sqrt[6]{\frac{x-3}{x+3}} + c$

d. $\ln \sqrt[12]{\frac{x-3}{x+3}} + c$

e. $\ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + c$

13. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x - 1}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\ln (e^x + 1) + c$

b. $\ln |e^x - 1| + c$

c. $\ln e^x + c$

d. $\ln |1 - e^x| + c$

e. $e^x + c$

14. $\int \frac{\ln |x|\,dx}{x}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\ln^2 |x| + c$

b. $\frac{\ln^2 |x|}{2} + c$

c. $\ln 2x + c$

d. $\frac{\ln^3 |x|}{3} + c$

e. $\frac{\ln^2 |x|}{3} + c$

Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Riemann' ın uzay geometri konusundaki çalışmaları, modern kuramsal fiziğin gelişmesine önemli etkileri olmuştur. Bu gün Riemann integrali olarak bilinen belirli integral kavramını ortaya koymuştur.

"Riemann gibi bir geometrici gerçek dünyanın en önemli çizgilerinin hemen hemen hepsini herkesten önce sezmiş olabilirdi."

A. S. EDDINGTON