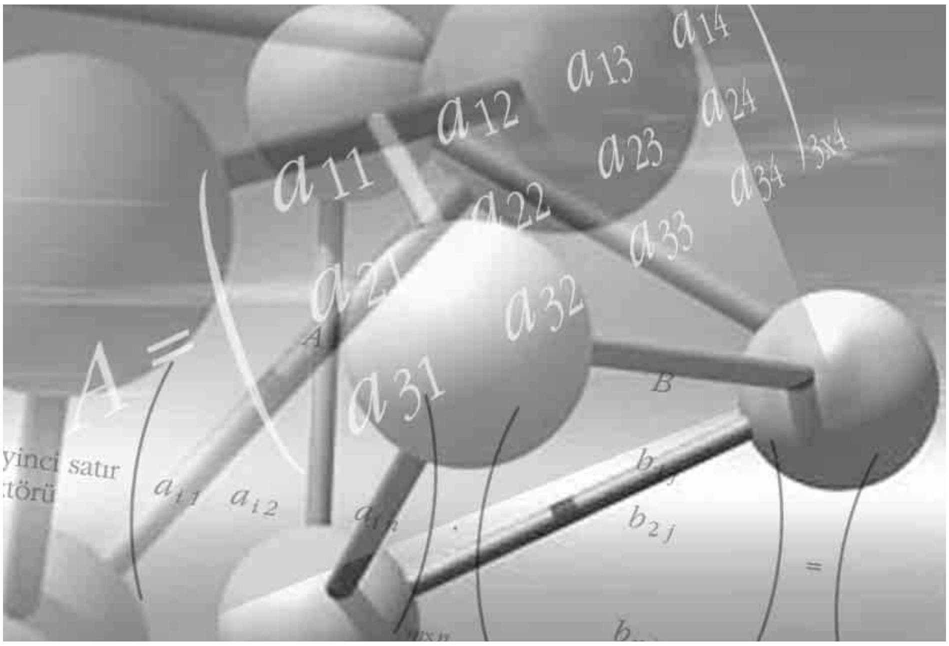
12

Matrisler



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *matris kavramını tanıyacak ve bir tablonun bir matris biçiminde gösterilişini yazabileceksiniz,*
- *bir matrisin boyutunu tanıyıp, matrislerin adlandırılışını öğreneceksiniz,*
- *uygun matrisler arasında toplama, çarpma ve bir sayı ile çarpma işlemleri yapabileceksiniz,*
- *ters matris kavramını tanıyıp, ilkel satır-sütun işlemleri yoluyla ters matrisin hesaplanışını öğreneceksiniz,*
- *doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerini matris yöntemiyle bulabileceksiniz,*
- *çeşitli ekonomi problemlerinin matrislerle temsil edilişini yazabilecek ve çözümlerini matris yöntemiyle araştırabileceksiniz.*

İçindekiler

- *Matris Tanımı, Bir Matrisin Boyutu ve Özel Türden Matrisler*
- *Matris İşlemleri*
- *Matris İşlemlerinin Özellikleri*
- *Ters Matris*
- *Doğrusal Denklem Sistemlerinin Matrislerle Gösterilişi*

DİKKAT

- ***Tanımlar ve yeni kavramlar üzerinde iyi düşünülmeli ve doğru algılamaya çalışılmalıdır.***
- ***Örnekler iyi incelenmelidir.***
- ***Öğrenciye bırakılan sorularda verilenlerin ve bulunması istenilenlerin neler olduğu iyi ayırt edilmelidir.***
- ***Çalışırken mutlaka kağıt ve kalem kullanılmalıdır ve alıştırma sonuçları çözülerek bulunmalıdır.***

Giriş

Bu ünitenin konusu matrisler cebiri ve uygulamalarıdır. Daha açık ifade edecek olursak; bu ünitede matrislerin özellikleri, tipi ya da boyutu, matrisler arasında cebirsel işlemler, bu işlemlerin sağladığı özellikler, satır ve sütun işlemleri gibi konular ele alınacaktır. Uygulamada önemli yeri olan ters matrisin varlığı ve hesaplanmasına ilişkin bazı yöntemler üzerinde durulacaktır. Bütün bu gerekli kavramların verilmesinden sonra, matrislerin uygulama alanında önemini gösteren türden örnekler verilecektir. Bu tür örneklerin başında, doğrusal denklem sistemlerinin matris gösterimleriyle ifade edilişleri ve çözümlerinin irdelenmesi gelir. Matris gösterimleriyle verilen bir doğrusal denklem sisteminin çözümü yapılmadan, çözümün varlığı, varsa tekliği belirlenebilir; çözüm varsa, çözümün bulunmasını kolaylaştıran matris yöntemler verilebilir. Birçok ekonomik ilişkiler bir doğrusal denklem sistemiyle ifade edilebildiğinden, ekonomik ilişkilerin matematiksel olarak modellenmesinde matrislerin önemli bir yeri vardır. İleride vereceğimiz örnekler bu önemi daha iyi açıklayacaktır.

MATRİS TANIMI, BİR MATRİSİN BOYUTU VE ÖZEL TÜRDEN MATRİSLER

AMAÇ 1

Bu kesimde amaçlanan, tabloların matris olarak gösterilişi, matris terminolojisinin tanıtılması; kare, satır, sütun, birim matrisler, bir matrisin devriği, matris eşitliği kavramlarının açıklanmasıdır.

Önce "**matris nedir?**" sorusuna yanıt arayalım. Günlük yaşantımızda sayıların, değişkenlerin veya parametrelerin oluşturduğu çeşitli tablolar yapmaya ihtiyaç duyarız. Örneğin, bir fabrikanın ürettiği, diyelim ki beş tür malın ilk altı aylık üretim miktarlarının aylara göre dökümünün verilmesi istenirse, bunu göstermenin bir yolu beş satır ve altı sütundan oluşan bir tablo hazırlamaktır. Satırların karşısına mal çeşitlerini, sütunların tepesine de aylar yazılırsa, bir satır ile bir sütun kesiştiği yere de o ay içinde üretilen o malın miktarı yazılabilir. Bu tabloya fabrikanın ilk alt aylık üretim tablosu denildiği gibi üretim matrisi de denir. Aşağıdaki örneği inceleyiniz.

Bir giyim atölyesinde üretilen malların yılın ilk ayı içindeki üretim miktarları aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

	Ocak	Şubat	**Mart**	Nisan	**Mayıs**	Haziran
Ceket	250	200	150	300	200	100
Pantolon	300	250	175	300	250	200
Yelek	100	75	75	50	25	0
Gömlek	350	400	350	300	325	350
Kravat	500	450	400	375	250	150

Beş satır, altı sütundan oluşan bu tablo, hangi malın hangi ay ne miktarda üretildiğini göstermektedir. Kısa bir ifadeyle, atölyenin ilk alt aylık **üretim tablosu** veya **üretim matrisi**dir.

Sayıların, değişkenlerin veya parametrelerin oluşturduğu dikdörtgen biçiminde bir tabloya bir **matris** denir.

Bir matrisi oluşturan nesnelere o **matrisin elemanları ya da öğeleri** adı verilir. Yatay çizgiler üzerinde yer alan matris elemanlarına matrisin **satırları**, düşey çizgiler üzerinde yer alan matris elemanlarına matrisin **sütunları** denir. Bir matris, satır sayısı ve sütun sayısı ile ifade edilir. m sayıda satırı, n sayıda sütunu olan bir matris için mxn ye **matrisin boyutu** ya da **mertebesi** denir. Bir matrisin boyutu yazılırken daima önce satır sayısı sonra da sütun sayısı yazılır. Eğer satır sayısı sütun sayısına eşit ise, bu tür bir matrise **kare matris** denir. Boyutu nxn olan bir matris, kısaca ***n*- yinci mertebeden kare matris** diye de ifade edilebilir. Bir matrisin m sayıda satırı ve bir tek sütuna varsa, yani matrisin boyutu mx1 ise, böyle bir matrise **sütun matris** ya da bir **sütun vektör** denir. Bir tek satırı ve n sayıda sütunu, yani mertebesi 1xn olan bir matrise de **satır matris** ya da bir **satır vektör** denir.

Bir matrisin satırları ve sütunları normal parantez ( ) veya köşeli parantez [ ] biçiminde çizgiler arasına yazılır ve matrisin boyutu da parantezin sağ alt köşesine yazılarak gösterilir. Bu kitapta matrisler için ( ) gösterimini kullanacağız.

Aşağıda çeşitli boyutlardaki matrisler için birer örnek verilmiştir.

ÖRNEK 1

$$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 & 0 \\ 0{,}5 & \sqrt{2} & -8 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$$ ***2 x 4 boyutunda bir matris***

$$\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$ ***2 nci mertebeden kare matris***

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -7 & \sqrt{3} \end{pmatrix}_{1 \times 4}$$ ***Satır matris (satır vektör)***

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$ ***Sütun matris (sütun vektör)***

Matrisler, A, B, C, ... , X, Y gibi büyük harfler ile onların öğeleri de küçük harfler ile gösterilirler. Boyutu $m x n$ olan genel bir matrisin i -yinci satırı ile j -yinci sütunun kesiştiği yerdeki elemanı a_{ij} olarak yazılır. Böylece A matrisi $A = (a_{ij})_{mxn}$ biçiminde temsil edilebilir (Bu tür yazılışlarda, yani bir matrisin boyutunun yazılışında olsun veya bir elemanın konumunun gösterilişinde olsun, daima satır sayısı ya da numarası sütun sayısından ya da numarasından önce yazılır). Gösterilişi $A = (a_{ij})_{mxn}$ olan m satır, n sütundan oluşan genel bir A matrisi, elamanlarının konumları açık gösterilecek şekilde aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1.\ \text{satır} \\ \leftarrow 2.\ \text{satır} \\ \\ \leftarrow i\text{ -inci satır} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1.\ \text{sütun} & 2.\ \text{sütun} & j\text{ -yinci sütun} \end{array}$$

İki matrisin boyutları ve aynı konumdaki tüm elemanları eşit ise bu iki matrise **eşit matrisler** denir. O halde, $A = (a_{ij})_{mxn}$ ve $B = (b_{ij})_{rxs}$ matrislerinin eşit olması için gerekli ve yeterli koşul $m = r$, $n = s$ ve her i, j için $a_{ij} = b_{ij}$ olmasıdır.

ÖRNEK 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix}$ ***matrisinin*** $B = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ***matrisine eşit olması için x, y, z ne olmalıdır?***

ÇÖZÜM

A matris ile B matrisinin boyutları aynı olduğundan, $A = B$ olması için $x = 5$, $y = 3$, $z = 8$ olmalıdır.

ÖRNEK 3

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 4 & -5 & 5 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \\ 9 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad E=(-4)$$

matrisleri veriliyor. Bu matrislerin boyutlarını, eleman sayılarını ve a_{24}, b_{32}, c_{31}, d_{14}, e_{11} elemanlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Her bir matrisi tek tek ele alıp soruları yanıtlayalım. A matrisinin boyutu 3x4 dür; özel bir adlandırılışı yoktur. Elemanları sayısı 3x4 = 12 dir. a_{24}, ikinci satır dördüncü sütunda bulunan eleman olduğundan $a_{24} = 8$ dir.

B matrisinin boyutu 3x3 dür; yani üçüncü mertebeden bir kare matristir. Elemanları sayısı 3x3 = 9 dur. $b_{32} = -1$ dir.

C matrisinin boyutu 3x1 dir. Bu matris bir sütun matristir; elemanları sayısı 3 ve $c_{31} = 6$ dır.

D matrisinin boyutu 1x4 dür. Bu matris bir satır matristir; elemanları sayısı 4 ve $d_{14} = -1$ dir.

E matrisi boyutu 1x1 olan hem satır hem de sütun matristir. E nin tek elemanı $e_{11} = -4$ dür.

n- yinci mertebeden bir $A = (a_{ij})$ kare matrisinde a_{11} , a_{22} , a_{33} , ... , a_{nn} elemanlarına kısaca **matrisin köşegen elemanları** denir.

Eğer bir kare matrisin köşegen elemanlarının hepsi 1 ve diğer tüm elemanları 0 ise, böyle bir matrise bir **birim matris** denir. n- yinci merteben bir birim matris için

$$a_{ij}=\begin{Bmatrix} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{Bmatrix} \qquad (i,j=1,2,\dots,n)$$

dir. Her mertebeden birim matris vardır ve mertebesi n olan birim matris, genel olarak, I_n simgesiyle gösterilir.

Örneğin,

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrislerinden birincisi 2 ci mertebeden, ikincisi de 3 cü mertebeden birim matrislerdir.

Bir $A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisi için A nın **devriği (transpozesi)** diye adlandırılan ve $A^{T} = (a'_{ij})_{nxm}$ ile gösterilen matris, boyutu nxm olan ve $a'_{ij} = a_{ji}$ olarak tanımlanan matristir. Bir başka ifade ile, A nın satırlarını sütun, sütunlarını da satır yaparak elde edilen matrise A nın devriği denir ve bu yeni matris A^T ile gösterilir. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}_{3x4}$$

matrisinin devriği, boyutu 4x3 olan ve A nın satırlarını sütun kabul eden matristir.

$$A^T = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}_{4x3}$$

ÖRNEK 4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{2x3}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}_{3x1}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

matrislerinin devriklerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{3x2}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}_{1x3},$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = C$$

SIRA SİZDE 1

1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ \sqrt{3} & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$ matrisinin öğeleri için $2a_{13} - 3a_{21}^2 - 4a_{23}$ işleminin sonucunu bulunuz.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ y & z & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 9 & z & z \end{pmatrix}$ matrislerinin eşit olmaları için x, y, z değerleri ne olmalıdır?

3. Öğeleri $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, $a_{12} = a_{21} = -1$, $a_{13} = a_{31} = 2$ ve $a_{23} = a_{32} = 3$ olan kare matrisi yazınız.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ -2 & 1 & z \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ matrisi için $A = A^T$ ise, A matrisinin bilinmeyen öğelerini bulunuz ve A matrisini yeniden yazınız.

MATRİS İŞLEMLERİ

Bu kesimde matris toplaması, çıkarması, sayı ile çarpımı ve matris çarpımı işlemlerini tanıyacak ve bu işlemlerin kimi özelliklerini öğreneceksiniz.

Matris Toplamı

$A = (a_{ij})_{mxn}$ ve $B = (b_{ij})_{mxn}$ aynı tipten iki matris olsunlar. Öğeleri $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1,2,...m\ ;\ j = 1,2,...,n)$ olan $C = (c_{ij})_{mxn}$ matrisine A ve B matrislerinin **toplamı** denir ve bu matris $C = A + B$ şeklinde gösterilir. Bu durumda A ve B matrislerine **toplanabilir** matrisler adı verilir.

Açıktır ki,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

dir.

A ve B matrislerinin $A - B$ farkı da benzer şekilde tanımlanır.

ÖRNEK 5

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ***matrisleri için A + B , A - B matrislerini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 + (-1) & 2 + 7 & -1 + 4 \\ 0 + 3 & 4 + (-2) & 5 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 - (-1) & 2 - 7 & -1 - 4 \\ 0 - 3 & 4 - (-2) & 5 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -5 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Sayı İle Çarpma

Bir matrisin bir **sayı ile çarpımı**, o matrisin elemanlarının konumlarını bozmadan, tüm elemanların verilen sayı ile çarpımıyla oluşturulan matristir. Yani k bir sayı ve $A = (a_{ij})_{mxn}$ verilen bir matris ise, k ile A nın kA ile gösterilen sayı ile çarpımı $kA = (ka_{ij})_{mxn}$ olarak tanımlanan matristir.

ÖRNEK 6

$k = 5$ ***ve*** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ***için kA matrisini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$kA = 5\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.4 & 5.(-2) \\ 5.3 & 5.0 \\ 5.1 & 5.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ 15 & 0 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$$

ÖRNEK 7 ***1 Ocak 1999 tarihinde peynir, et, şeker fiyatları milyon TL/kg olarak F matrisiyle veriliyor.***

$$F = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textbf{Peynir} \\ \text{Et} \\ \textbf{Şeker} \end{matrix}$$

Enflasyonun her yıl %30 oranında artacağını varsayarak, 3 yıl sonra 1 Ocak 2002 tarihindeki peynir, et, şeker fiyatlarını temsil eden sütun matrisi bulunuz.

ÇÖZÜM

1. yıl sonunda $F_1 = F + 0{,}30\, F = 1{,}30\, F$
2. yıl sonunda $F_2 = F_1 + 0{,}30\, F_1 = 1{,}30\, F_1 = 1{,}30\,(1{,}30\, F) = (1{,}30)^2\, F$
3. yıl sonunda $F_3 = F_2 + 0{,}30\, F_2 = 1{,}30\, F_2 = 1{,}30\,(1{,}30)^2\, F = (1{,}30)^3\, F$

olur. Böylece aranılan matris, yani 3 yıl sonraki fiyat matrisi

$$F_3 = (1{,}30)^3\, F = 2{,}197 \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}197.1{,}5 \\ 2{,}197.2{,}5 \\ 2{,}197.0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}2955 \\ 5{,}4925 \\ 0{,}8788 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Bir A matrisi için $(-1)\,A = -A$ olarak gösterilir. Sözgelişi, 6. Örnekteki A matrisi için

$$-A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

dir.

ÖRNEK 8 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ***matrisleri ve $k = -1$ sayısı veriliyor.***

$A + kB$ matrisini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$A + kB = A + (-1)\,B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -4-5 \\ 1+1 & 7-3 \end{pmatrix} = A - B$$

olur. O halde, $A + (-1)\,B = A - B$ dir.

Tüm elemanları sıfır olan bir matrise **sıfır matris** denir. Her mertebeden sıfır matris vardır ve genel olarak sıfır matris O simgesiyle gösterilir. Açıktır ki, her A matrisi için $A - A = O$ dır.

ÖRNEK 9

Bir A matrisi için A = - A ise, A nın sıfır matris olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

A herhangi bir matris olsun. $A = -A$ ise, bu eşitliğin her iki yanını A matrisi ile toplarsak

$$A + A = A + (-A)$$
$$2A = A - A = O$$
$$2A = O$$
$$A = O$$

olur. O halde, A sıfır matristir. (Burada O, A ile aynı mertebeden olan sıfır matrisi göstermektedir).

İki Vektörün İç Çarpımı

A bir satır vektör, B de bir sütun vektör olsun. Eğer A ile B nin elemanları sayısı eşit ise, A nın her bir elemanının B nin karşılık gelen elemanı ile çarpılıp toplanmasıyla elde edilen sayıya A satır vektörüyle B sütun vektörünün **iç çarpımı** denir ve bu sayı $A \,.\, B$ ile gösterilir. Kısaca

$$A = (a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n}) \text{ ve } B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

ise,

$$A \,.\, B = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + \ldots + a_{1n}\, b_{n1}$$

olur.

ÖRNEK 10

$$A = (2 \quad 3 \quad -4) \quad \textbf{\textit{ve}} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

vektörleri için A . B iç çarpımını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$A \,.\, B = (2 \quad 3 \quad -4)\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \,.\, (-1) + 3 \,.\, 7 + (-4) \,.\, 5$$

$$= -2 + 21 - 20 = -1$$

bulunur.

Matris Çarpımı

Şimdi iki matrisin çarpımını tanımlamak istiyoruz. İki matrisin toplamının veya farkının tanımlanabilmesi için bunların boyutlarının eşit olması gerektiğini biliyoruz. İki matrisin çarpımının tanımlanabilmesi için de bunların boyutları arasında bir ilişki olması gerekmektedir. Bu ilişki şudur: Matrislerin birincisinin sütun sayısı ikincisinin satır sayısına eşit olmalıdır. Bu koşul altında iki matrisin çarpımını aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisi ile $B = (b_{ij})_{nxr}$ matrisinin AB ile gösterilen çarpımı öyle bir $C = (c_{ij})$ matrisidir ki, C nin boyutu mxr dir ve c_{ij} elemanı A nın i- yinci satır vektörü ile B nin j- yinci sütun vektörünün iç çarpımıdır; yani her $i = 1, 2, \dots , m$ ve $j = 1, 2, \dots r$ için

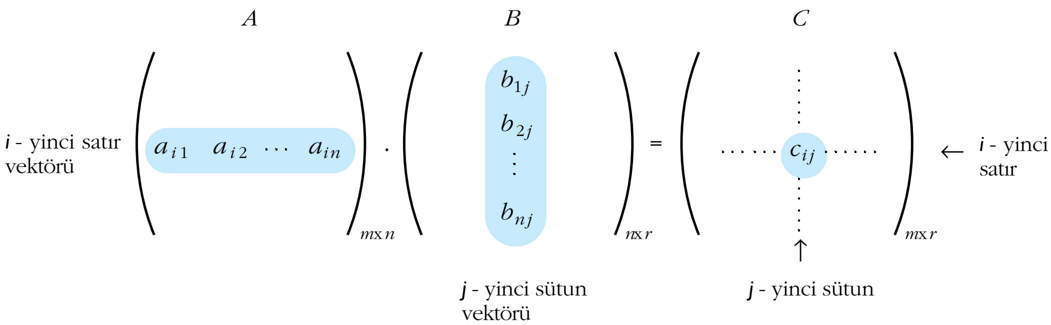
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \dots + a_{in}\, b_{nj}$$

veya kısaca

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

dir.

$AB = C$ çarpımının daha iyi anlaşılması için tanımı biraz görselleştirelim:



ÖRNEK 11

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}_{2x3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2x2}$$

matrisleri için tanımlı olan çarpımları belirleyiniz ve çarpım matrisleri bulunuz.

ÇÖZÜM

Sadece AB ve CA çarpımları tanımlıdır. (Nedenini siz açıklayınız)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.1 + 4.8 + 7.6 & 2.0 + 4.3 + 7.4 & 2.(-2) + 4.(-1) + 7.2 \\ -1.1 + 5.8 + 9.6 & -1.0 + 5.3 + 9.4 & (-1)(-2) + 5(-1) + 9.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 76 & 40 & 6 \\ 93 & 51 & 15 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2x2} . \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$= \begin{pmatrix} 3.2 + 2.(-1) & 3.4 + 2.5 & 3.7 + 2.9 \\ 0.2 + 5.(-1) & 0.4 + 5.5 & 0.7 + 5.9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 22 & 39 \\ -5 & 25 & 45 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

ÖRNEK 12

Bir konfeksiyon atölyesinde satışa hazırlanan dört parti giyim eşyasının miktarları E matrisi, bu eşyanın birim fiyatları da milyon TL olarak F matrisi ile veriliyor. Her bir parti malın değerini gösteren sütun matris D yi bulunuz.

$$E = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cccc} \textbf{Ceket} & \text{Pantolon} & \textbf{Gömlek} & \text{Kravat} \end{array}$$

$$E = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 250 & 200 \\ 75 & 100 & 175 & 175 \\ 125 & 125 & 100 & 100 \\ 140 & 160 & 300 & 250 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{1. parti} \\ \text{2. parti} \\ \text{3. parti} \\ \text{4. parti} \end{array}$$

$$F = \begin{pmatrix} 80 \\ 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textbf{Ceket} \\ \text{Pantolon} \\ \textbf{Gömlek} \\ \text{Kravat} \end{array}$$

ÇÖZÜM

Her bir parti malın değerini gösteren matris $D = EF$ dir. O halde,

$$D = EF = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 250 & 200 \\ 75 & 100 & 175 & 175 \\ 125 & 125 & 100 & 100 \\ 140 & 160 & 300 & 250 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8000 + 3000 + 3750 + 2000 \\ 6000 + 2000 + 2625 + 1750 \\ 10000 + 2500 + 1500 + 1000 \\ 11200 + 3200 + 4500 + 2500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16750 \\ 12375 \\ 15000 \\ 21400 \end{pmatrix} \begin{array}{lll} \text{1. parti malın değeri} & & \\ \text{2. parti} & " & " \\ \text{3. parti} & " & " \\ \text{4. parti} & " & " \end{array}$$

ÖRNEK 13

Altı öğrencinin devam ettiği bir dersin iki ara sınav ve bir genel sınav notlarının dökümü S matrisi ile veriliyor. Ara sınavlar %20 ve genel sınav %60 ağırlıklı olduğuna göre, dönem sonunda bu öğrencilerin başarı notları listesini (matrisini) bulunuz.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \textbf{1.ara sınav} & \text{2. ara sınav} & \textbf{Genel sınav} \end{array} \\
S = & \begin{pmatrix} 42 & 65 & 70 \\ 55 & 40 & 65 \\ 30 & 50 & 60 \\ 76 & 82 & 85 \\ 30 & 40 & 43 \\ 70 & 83 & 92 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \text{1. öğrenci} \\ \text{2. öğrenci} \\ \text{3. öğrenci} \\ \text{4. öğrenci} \\ \text{5. öğrenci} \\ \text{6. öğrenci} \end{array}
$$

ÇÖZÜM

Ara sınavların ve genel sınavın ağırlıkları matrisini A ile gösterecek olursak, A matrisini

$$A = \begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,20 \\ 0,60 \end{pmatrix}$$

sütun matrisi olarak alabiliriz. (A yı neden satır matris değilde sütun matris olarak aldığımızı siz düşününüz). O zaman, öğrencilerin başarı notları matrisine B diyecek olursak, $B = SA$ olur. Böylece

$$B = SA = \begin{pmatrix} 42 & 65 & 70 \\ 55 & 40 & 65 \\ 30 & 50 & 60 \\ 76 & 82 & 85 \\ 30 & 40 & 43 \\ 70 & 83 & 92 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,20 \\ 0,60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,4 + 13 + 42 \\ 11 + 8 + 39 \\ 6 + 10 + 36 \\ 15,2 + 16,4 + 51 \\ 6 + 8 + 25,8 \\ 14 + 16,6 + 55,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63,4 \\ 58 \\ 52 \\ 82,6 \\ 39,8 \\ 85,8 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

SIRA SİZDE 2

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ matrisleri için $A - 2B + AB$ matrisini bulunuz.

2. $A = (2 \;\; 3 \;\; 7)$ satır vektörü ile $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sütun vektörünün iç çarpımı olan sayıyı bulunuz.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor.

a) AB **b)** BA **c)** $(AB)\,C$
d) A^2 **e)** $A\,(B+C)$

matrislerini bulunuz.

MATRİS İŞLEMLERİNİN ÖZELLİKLERİ

AMAÇ 2 ***Matris işlemlerinin sağladığı kimi özelliklerin tanıtılması.***

Matris toplaması, çıkarması, sayı ile çarpımı ve matris çarpımına ilişkin kimi özellikler aşağıda dört grup olarak sıralanmıştır. Bu gruplarda geçen işlemler için verilen matrislerin uyumlu oldukları, yani iki matrisin toplamı söz konusu ise bu matrislerin toplanabilir oldukları, çarpımları söz konusu ise çarpılabilir oldukları kabul edilmiştir. Özelliklerin kanıtlarına girilmeyecek, bazılarının örneklerle doğrulanmasıyla yetinilecektir.

I. i) $A + B = B + A$ — Matris toplamasının değişme özelliği vardır.

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ — Matris toplamasının birleşme veya parantez kaydırma özelliği vardır.

iii) $A + O = O + A = A$ — Sıfır matris, matris toplamasının etkisiz elemanıdır.

iv) $A + (-A) = O$ — $-A$, A matrisinin toplamsal tersidir.

II. k, k_1 , k_2 sayılar

i) $kA = Ak$

ii) $(k_1 + k_2)\,A = k_1\,A + k_2\,A$

ii) $k\,(A + B) = kA + kB$

iii) $k_1\,(k_2\,A) = (k_1\,k_2)\,A$

iv) $k\,(AB) = (kA)\,B = A\,(kB)$

III. i) $A\,(BC) = (AB)\,C$ — Matris çarpımının birleşme veya parantez kaydırma özelliği vardır.

ii) $A\,(B + C) = AB + AC$ — Matris çarpımının toplama üzerine dağılma özelliği vardır.

iii) $IA = AI = A$ — (Burada A kare matris değilse, soldaki birim matris ile sağdaki birim matrisin mertebeleri farklıdır.)

IV. i) $(A + B)^T = A^T + B^T$

ii) $(A^T)^T = A$

iii) $(kA)^T = kA^T$

iv) $(AB)^T = B^T\,A^T$

Şimdi yukarıdaki kimi özellikleri örneklerle doğrulayalım ve önemlerine değinelim.

ÖRNEK 14

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3x\\ 5 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}y & -x\\ 3 & 7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2y & -4x\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

matrisleri veriliyor. Bu matrisler için matris toplamının birleşme özelliği I (ii) yi doğrulayımız.

ÇÖZÜM

$$(A+B)=\begin{pmatrix}2 & 3x\\ 5 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y & -x\\ 3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+y & 2x\\ 8 & 3\end{pmatrix}$$

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix}2+y & 2x\\ 8 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2y & -4x\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3y & -2x\\ 9 & 3\end{pmatrix}$$

$$(B+C)=\begin{pmatrix}y & -x\\ 3 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2y & -4x\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y & -5x\\ 4 & 7\end{pmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}2 & 3x\\ 5 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3y & -5x\\ 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3y & -2x\\ 9 & 3\end{pmatrix}$$

O halde, $(A+B)+C=A+(B+C)$ dir.

Matris toplamasının birleşme özelliğinin önemi şudur: Sonlu sayıda toplanabilir matris için parantez kullanmadan bunlar arasına + işareti konularak toplamları yazılabilir. Örneğin, $A+B+C$, $A+B+C+D$ yazılışları anlamlıdır. Çünkü bu toplamlar ikili nasıl gruplanırsa gruplansın sonuç değişmeyecektir.
Genel olarak, matris çarpımının değişme özelliği yoktur; yani

$$AB \neq BA$$

dır. Çünkü AB çarpımı tanımlı iken BA tanımlı olmayabilir veya tersi (sözgelişi, A nın boyutu 2x3 ve B nin boyutu 3x4 ise AB çarpımı tanımlı BA çarpımı tanımlı değildir). Aslında AB ve BA çarpımlarının her ikisi de tanımlı olsa bile, genelde eşitlik yoktur. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklamaktadır.

ÖRNEK 15

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 7\end{pmatrix}$$

matrisler için $AB \neq BA$ olduğunu görünüz.

ÇÖZÜM

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+4 & 5+14\\ -3+8 & 15+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 19\\ 5 & 43\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+15 & -2+20\\ 2+21 & 4+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 18\\ 23 & 32\end{pmatrix}$$

olduğundan $AB \neq BA$ dır.

A ve B çarpılabilir matrisler ve bu matrislerden biri sıfır matris ise AB çarpımının sıfır matris olacağı açıktır. Fakat bunun tersi doğru değildir; yani $A \neq O$ ve $B \neq O$ olduğu halde $AB = O$ olabilir. Aşağıdaki örneği inceleyiniz.

ÖRNEK 16

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

matrisleri veriliyor. AB çarpımının sıfır matris olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9+9 & 27-27 \\ -3+3 & 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu örnek şunu göstermektedir: A ve B gibi iki matris için $AB = O$ ise $A = O$ veya $B = O$ olmak zorunda değildir. Oysa a, b gerçel sayıları için $ab = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ olmak zorunda olduğunu anımsayınız. Yine a, b, c sayıları için $ab = ac$ $(a \neq 0)$ ise, $b = c$ dir. Gerçel sayılar için çarpmanın kısaltma özelliği olarak bilinen bu özellik de matris çarpımı için genel olarak geçerli değildir. Aşağıdaki örneği inceleyiniz.

ÖRNEK 17

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisleri veriliyor. Bu matrisler için kısaltma kuralının geçerli olmadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+9 & 2+6 \\ -12+27 & 6+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 2+6 \\ 6+9 & 6+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

O halde, $AB = AC$ dir; fakat kısaltma kuralı geçerli değildir. Çünkü $B \neq C$ dir.

Matris çarpımının birleşme özelliği III(i) nedeniyle çarpılabilir matrisler için ABC, $ABCD$ gibi yazılışları anlamlı olur. Aşağıdaki örnek, matris çarpımının birleşme özelliğini doğrulayan bir örnektir.

ÖRNEK 18

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

matrisleri için $(AB)\,C = A\,(BC) = ABC$ eşitliğini doğrulayınız.

ÇÖZÜM

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(AB)\,C = \overset{AB}{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}}\overset{C}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}} = \overset{ABC}{\begin{pmatrix} 4 \\ -22 \end{pmatrix}}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}\overset{BC}{\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}} = \overset{ABC}{\begin{pmatrix} 4 \\ -22 \end{pmatrix}}$$

Böylece çarpılabilir A, B ve C matrisleri için $(AB)\,C = A\,(BC) = ABC$ eşitliği doğrulanmış olur.

Matris çarpımın birleşme özelliği, kare bir matrisin pozitif bir kuvvetinin tanımlanmasını da sağlar. A bir kare matris ve n de pozitif bir tam sayı ise, A nın n- yinci kuvveti

$$A = \underbrace{A \,.\, A \,.\, A \,....\, A}_{n \text{ tane}}$$

olarak tanımlanır. Özel olarak, A bir köşegen matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

ise,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm}^n \end{pmatrix}$$

olur.

ÖRNEK 19

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ ***köşegen matrisinin beşinci kuvvetini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$A^5=\begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix}$$

ÖRNEK 20

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisleri için $(A+B)^T=A^T+B^T$ ve $(AB)^T=B^TA^T$ eşitliklerini doğrulayınız.

ÇÖZÜM

$$A^T=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B^T=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T+B^T=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^TA^T=\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

olduğundan $(A+B)^T=A^T+B^T$ ve $(AB)^T=B^TA^T$ eşitlikleri sağlanmış olur.

SIRA SİZDE 3

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

matrisleri veriliyor. Aşağıdaki matrisleri hesaplayınız. Eğer matris işlemi tanımlı değilse, neden tanımlı olmadığını açıklayınız.

a) $A+B$, **b)** $A-B$, **c)** $B+C$, **d)** $3A$, **e)** $B+C^T$,
f) $4A-2B+3C^T$, **g)** AB, **h)** AC, **i)** $(A+B)\,C$, **j)** $A^T\,C^T$,
m) $A+X=B$ olacak şekildeki X matrisini bulunuz.
n) $A+Y=O$ olacak şekildeki Y matrisini bulunuz.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor.

a) AB matrisini bulunuz.

b) Bu vektörlerin iç çarpımı olan $A \, . \, B$ sayısını hesaplayınız.

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$AB = BA = I$ eşitliğini doğrulayınız.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$AX = XA = I$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir X matrisi bulunuz.

5. Bir giyim mağazasının üç ambarında bulunan dört kalem mallarının değerleri, milyon TL olarak, aşağıdaki D matrisi ile veriliyor. Eğer bu mağaza, mallarına %20 zam yaparsa ambarlarındaki malların değerlerini temsil eden matris ne olur?

$$D = \begin{pmatrix} 500 & 750 & 900 \\ 650 & 525 & 830 \\ 420 & 640 & 835 \\ 340 & 590 & 610 \end{pmatrix}$$

6. A ve B boyutları aynı olan kare matrisler ise,

$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

eşitliğini gösteriniz.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) A^4 matrisini bulunuz.

b) $AB = BA = I$ olacak şekildeki B matrisinin

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix}$$

olduğunu gösteriniz.

8. Bir şirket satın almak isteği 90 adet televizyon, 110 adet buzdolabı, 70 adet çamaşır makinası için dört ayrı firmadan fiyat teklifleri alıyor. Firmaların bu mallar için verdikleri birim fiyatlar, milyon TL olarak, A matrisi ile temsil edilmektedir.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Tv} & \text{Bd} & \textbf{Çm} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 130 & 180 & 170 \\ 150 & 175 & 165 \\ 120 & 190 & 150 \\ 140 & 200 & 160 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{1. firma} \\ \text{2. firma} \\ \text{3. firma} \\ \text{4. firma} \end{array}$$

Eğer şirket bu malların hepsini aynı firmadan almak isterse, minimum toplam fiyatı hangi firma vermiştir?

TERS MATRİS

AMAÇ 3 ***Tersi olan kare matrislerin terslerinin bulunması.***

A bir kare matris olsun. A ile sağdan ve soldan çarpıldığında aynı birim matrisi veren bir matris varsa, bu matrise A nın **tersi** denir ve bu matris A^{-1} ile gösterilir. O halde, A nın tersi A^{-1} varsa,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

dır.

Şimdi ters matrise ilişkin doğrudan tanımdan elde edilebilecek bazı uyarılar ve sonuçlar sıralayalım:

i) Ancak kare matrislerin tersleri olabilir. Her kare matrisin de tersi yoktur.

ii) A matrisinin tersi varsa, bu ters matris de kare matristir ve boyutu A nın boyutu ile aynıdır.

iii) A nın tersi varsa bu ters matris tektir.

iv) A nın tersi A^{-1} varsa, A da A^{-1} ın tersidir; yani $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

ÖRNEK 21

$A = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ***matrisleri veriliyor. $A^{-1} = B$ olduğunu gösteriniz.***

ÇÖZÜM

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

olduğundan $A^{-1} = B$ dir.

ÖRNEK 22

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ***matrisinin tersinin olmadığını gösteriniz.***

ÇÖZÜM

A matrisinin tersinin varlığını kabul edelim. Bu matris A ile aynı boyutta bir matris olacaktır; diyelim ki

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

olsun ve $AB = BA = I$ eşitliklerini sağlasın.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_{11} & 2b_{12} \\ 5b_{11} & 5b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sağ yandaki son iki matrisin eşitliğinden

$$\begin{array}{ll} 2b_{11} = 1 & 2b_{12} = 0 \\ 5b_{11} = 0 & 5b_{12} = 1 \end{array}$$

denklemleri elde edilir. Aynı zamanda $b_{11} = 1/2$ ve $b_{11} = 0$ (benzer olarak $b_{12} = 0$ ve $b_{12} = 1/5$) olamayacağından, $AB = I$ eşitliğini sağlayan bir B matrisi bulunamaz. Öyleyse A matrisinin ters matrisi yoktur.

ÖRNEK 23

A matrisinin tersi varsa, tek olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

A matrisinin iki tane tersinin varlığını kabul edelim. Bunlar B ve C olsunlar. O zaman

$$AB = BA = I$$
$$AC = CA = I$$

eşitlikleri vardır. Şimdi bu eşitlikleri ve çarpımın birleşme özelliğini kullanırsak

$$B = BI = B\,(AC) = (BA)\,C = IC = C$$

olur.

ÖRNEK 24

A ve B aynı boyutlu tersleri olan matrisler ise, AB çarpım matrisinin de tersinin var olduğunu ve $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

A ve B aynı boyutlu tersleri olan matrisler ise, AB ve $B^{-1}A^{-1}$ çarpımları da tanımlıdır. $AB = C$ diyelim. $CD = DC = I$ olacak şekilde bir D matrisi var mı? Eğer $D = B^{-1}A^{-1}$ alırsak aranılan koşullar sağlanır. Gerçekten,

$$CD = (AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = A\,(BB^{-1})\,A^{-1} = A\,(I)\,A^{-1} = (A\,I)\,A^{-1} = AA^{-1} = I$$
$$DC = (B^{-1}A^{-1})\,(AB) = B^{-1}\,(A^{-1}A)\,B = B^{-1}\,(I)\,B = B^{-1}\,(IB) = B^{-1}B = I$$

olduğundan $C^{-1} = D$; yani $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

ÖRNEK 25

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ***matrisinin tersini bulunuz.***

ÇÖZÜM

A matrisinin tersi varsa, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ biçiminde bir matris olacaktır ve $AB = BA = I$ koşulunu sağlayacaktır. Buna göre,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3z & y+3t \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matris eşitliğinden

$$\begin{aligned} x + 3z &= 1 \\ 2x &= 0 \\ y + 3t &= 0 \\ 2y &= 1 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Sistem yeterince basit olduğundan çözümünü hemen yazabiliriz: $x = 0$, $y = 1/2$, $z = 1/3$, $t = -1/6$ bulunur. Şimdi

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$$

matrisinin A nın tersi, yani $B = A^{-1}$ olduğunu kolayca doğrulayabiliriz:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$$

bulunur.

İlkel Satır İşlemleri ve Ters Matrisin Hesaplanması

Bir kare matrisin tersini hesaplamanın birçok yöntemi vardır. 25. Örnekte 2 nci mertebeden bir kare matrisin tersinin nasıl bulunabileceğini gördük. Ancak, bu yol üç ve daha yukarı mertebeden matrislerin terslerinin bulunmasında uygun bir yol değildir. Örneğin, üçüncü mertebeden bir matrisin tersini bulmak için dokuz bilinmeyenli dokuz denklemden oluşan bir doğrusal denklem sistemini çözmek durumunda kalırız. Bu nedenle, ters matrisi hesaplamanın daha uygun yöntemlerini öğrenmeliyiz. Bu yöntemlerden biri de Gauss Yöntemidir. Gauss Yönteminin ne olduğuna girmeden önce bir matrisin satırları arasında tanımlanan ilkel satır işlemlerinden söz edelim:

Doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerini araştırırken (11. Ünite) üç tür temel satır işleminden söz etmiştik. Aynı tür işlemler bir matrisin satırlarına uygulandığında bu işlemlere **ilkel satır işlemleri**, elde edilen matrise de verilen matrise **satır eşdeğer matris** denir. Şimdi ilkel satır işlemlerini görelim:

Üç tip ilkel satır işlemi vardır:

I. Matrisin iki satırının yerlerinin değiştirilmesi

II. Bir satırın sıfır olmayan bir sayı ile çarpılması

III. Bir satırın bir sayı ile çarpılıp başka bir satır üzerinde toplanması

Satır işlemleri doğrusal cebirin en önemli araçlarından birisidir. Doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerinin belirlenmesinde ve daha kimi konularda hem kuramsal hem de uygulama açısından neredeyse kaçınılmazdır. Bu nedenlerden dolayı satır işlemlerinin mekanik bir biçime getirilmesi oldukça yararlıdır. Öncelikle bir matrise satır işlemleri uygulamaktan beklentimizin ne olduğuna açıklık getirelim. Amaç yapılan işlere göre değişmekle birlikte genelde verilen matrisi **basamak biçimine** getirmek çoğu problem için yeterlidir. Şimdi basamak matrisin ne olduğunu tanımlayalım. Eğer verilen bir matriste her satırın sıfırdan farklı ilk öğesi bir ve bu birin olduğu sütunda birden sonra gelen öğeler sıfır ise böyle bir matrise **basamak biçiminde (ya da eşolon biçimde)** bir matris denir. Aşağıda örnek olarak gösterilen matrisler basamak biçimdedir.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki örneklerden kolayca anlaşılacağı gibi öncelikle her satırın ilk öğesine bakıyoruz, eğer bu öğe bir ise birin altındaki öğenin sıfır olup olmadığını denetliyoruz. Şimdi verilen bir matrisin sistematik bir şekilde bu biçime nasıl getirileceğini görelim. Basamak biçimin tanımından da anlaşılacağı gibi öncelikle, eğer birinci satırın birinci öğesi sıfırdan farklı ise bu öğeyle birinci satır bölünür. Eğer birinci satırın birinci öğesi sıfır ise, birinci satır, birinci öğesi sıfırdan farklı olan herhangi bir satır ile değiştirilip yukarıdaki işlem uygulanır. Daha sonra birinci satır $i \geq 2$ için i- yinci satırın ilk öğesi a nın toplamsal tersi - a ile çarpılıp i- yinci satır üzerine toplanıp, birin altında kalan öğeler sıfır yapılır. Bu sayede basamak biçim için birinci satırın gerçekleşmesi gereken koşul sağlanmış olur. Daha sonra aynı işlem ikinci ve daha sonraki satırlara uygulanır. Böylece verilen matrisin basamak biçimine getirmiş oluruz. Şimdi bir örnekle uygulamayı görelim:

ÖRNEK 26

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ***matrisini basamak biçimine getiriniz.***

ÇÖZÜM

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $a_{11} = 1$ olduğundan ikinci ve üçüncü satırın birinci öğelerini sıfır yapmalıyız. İkinci satırın ilk öğesi sıfırdır. Üçüncü satırın ilk öğesini sıfır yapmak için birinci satır 2 ile çarpılıp üçüncü satıra eklenir.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 + 1.2 & 1 + 3.2 & 1 + (-1).2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ İkinci satırın ikinci öğesi 1 olduğundan, üçüncü satırın ikinci öğesi sıfır yapılmalıdır. Bunun için ikinci satır -7 ile çarpılıp üçüncü satıra eklenir.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 7 + 1.(-7) & -1 + 4.(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -29 \end{pmatrix}$$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Üçüncü satırın üçüncü öğesini bir yapmak için üçüncü satırın her öğesini üçüncü satırın üçüncü öğesi olan -29 sayısına böldük.

Apaçık olarak bu son elde ettiğimiz matris basamak biçimindedir.

ÖRNEK 27

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ***matrisini basamak biçimine getirelim.***

ÇÖZÜM

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ İlk satırın ilk elemanı 1 olmadığı için bu satırın her elemanını 4 e bölelim.

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -2/4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ İkinci satırın birinci öğesini sıfır yapmak için birinci satırın - 3 katını ikinci satıra ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & -1 + \frac{1}{4}.(-3) & 0 + \left(-\frac{1}{2}\right).(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & -7/4 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & -7/4 & 3/2 \end{pmatrix}$ İkinci satırın ikinci öğesini 1 yapmak için ikinci satırın her öğesini - 4/7 ile çarpalım.

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

ÖRNEK 28

Son bir örnek daha $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ***matrisini basamak biçimine getirelim.***

ÇÖZÜM

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ Birinci satırın birinci öğesi sıfır olduğu için bu satırın ilk öğesini sıfırdan farklı olan ikinci satır ile yer değiştirelim.

$\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ İlk satırın ilk öğesini 1 yapmak için birinci satırı -2 ye bölelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Eğer bir A kare matrisi A nın satırlarına uygulanan ilkel satır işlemleri sonucunda birim matrise dönüştürülebiliyorsa, bir başka ifadeyle A matrisi birim matris I ya satır eşdeğer ise, A matrisinin tersi vardır. Bunun için, A ile I aşağıda olduğu gibi yan yana yazılır ve elde edilen

$$(A : I)$$

blok matrisine ilkel satır işlemleri uygulanırsa, A nın yerinde birim matris oluşturulduğunda, I nın yerinde oluşan matris A^{-1} olur. Kısaca $(A{:}I)$ blok matrisi bir $(I{:}B)$ matrisine dönüştürülebildiğinde $B = A^{-1}$ dir. Bu yolla A^{-1} matrisinin bulunmasına **Gauss Yöntemi** denir.

ÖRNEK 29

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ***matrisinin varsa, tersini bulunuz.***

ÇÖZÜM

Gauss Yöntemini uygulayalım:

$(A : I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Birinci satırı - 2 ile çarpıp ikinci satır üzerinde toplayalım.

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -2 & 1 \end{array}\right)$ İkinci satırı $-\frac{1}{10}$ ile çarpalım.

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$$

İkinci satırı - 3 ile çarpıp birinci satır üzerinde toplayalım.

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 2/5 & 3/10 \\ 0 & 1 & \vdots & 1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$$

olur. A nın yerinde birim matris oluştuğu için A^{-1} vardır ve

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/10 \\ 1/5 & -1/10 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

dir.

ÖRNEK 30

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ ***matrisinin varsa, tersini bulunuz.***

ÇÖZÜM

Gauss Yöntemini uygulayalım:

$$(A:I) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Birinci satır ile ikinci satırı yer değiştirelim.

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Birinci satırı 3 ile çarpıp ikinci satır üzerinde toplayalım; üçüncü satırı 1/5 ile çarpalım.

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & \vdots & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

İkinci satırı 1/6 ile çarpalım.

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & \vdots & 1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

İkinci satırı - 2 ile çarpıp birinci satır üzerinde toplayalım.

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & \vdots & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & \vdots & 1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Üçüncü satırı 1/3 ile çarpıp birinci satır üzerinde; - 5/3 ile çarpıp ikinci satır üzerinde toplayalım.

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1/3 & 0 & 1/15 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1/6 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} = (I:B)$$

olduğundan, A matrisinin tersi vardır ve $A^{-1} = B$ dir; yani

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 1/15 \\ 1/6 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -10 & 0 & 2 \\ 5 & 15 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

olur.

ÖRNEK 31

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ ***matrisinin varsa, tersini bulunuz.***

ÇÖZÜM

Gauss Yöntemini kullanalım:

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Birinci satırın 3 katını ikinci satıra ekleyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Birinci blokun ikinci satırı bütünüyle sıfır olduğundan artık burada birim matris oluşturulamaz. O halde, A matrisinin tersi yoktur.

SIRA SİZDE 4

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor. Bu matrislerden hangileri birbirlerinin tersidir?

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ matrisi için $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ olduğunu doğrulayınız.

3. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ise, A matrisi nedir?

4. Satır işlemleri uygulayarak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisini birim matrise dönüştürünüz. A^{-1} var mı, varsa hangi matris?

5. Aşağıdaki matrislerin terslerini Gauss yöntemiyle bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN MATRİSLERLE GÖSTERİLİŞİ

AMAÇ 4

Verilen bir doğrusal denklem sisteminin matris gösterimiyle yazılışını ve çözümünün matris işlemleriyle nasıl yapılabileceğini örneklerle görmek.

n bilinmeyen ve m tane denklemden oluşan

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

doğrusal denklem sistemi

$$AX = B$$

biçiminde bir matris eşitliği ile gösterilebilir. Bu yazılışta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

katsayılar matrisi,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

bilinmeyenler matrisi ve

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

sabitler matrisi adını alır. Eğer doğrusal denklem sistemi homojen sistem ise, yani sabitler matrisi B sıfır matris ise, verilen doğrusal denklem sisteminin matris gösterimi

$$AX = O$$

şeklinde olur. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

ÖRNEK 32

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 \quad\quad\; + x_4 &= 5 \\ 2x_1 \quad\quad - x_3 + 3x_4 &= -1 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin matris gösterimini yazınız.

ÇÖZÜM

Sistemin katsayılar matrisi, bilinmeyenler matrisi ve sabitler matrisi, sırasıyla,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

olmak üzere, verilen sistemin $AX = B$ biçimindeki matris gösterimi

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

olur.

Doğrusal Denklem Sistemlerinin Matris Gösterimiyle Çözümlerinin Aranması

Verilen bir doğrusal denklem sisteminin matris gösterimi sistemin çözümünün aranmasında kolaylık sağlar. Şöyle ki; matris gösterimi $AX = B$ olan bir doğrusal denklem sistemi için, katsayılar matrisi A ile sabitler matrisi B yi yan yana yazıp elde ettiğimiz

$$(A : B)$$

blok matrisine verilen sistemin **genişletilmiş matrisi** denir. Bu genişletilmiş matris üzerine uygulanan her ilkel satır işlemiyle elde edilen yeni matris, başlangıçta verilen doğrusal denklem sistemine eşdeğer bir denklem sisteminin genişletilmiş matrisdir. Başka bir ifadeyle, $(A : B)$ genişletilmiş matris üzerine uygulanan ilkel satır işlemleri verilen sistemin çözümünü etkilemeyecektir. Çünkü $(A : B)$ üzerindeki ilkel satır işlemleri aslında verilen doğrusal denklem sistemi için satır işlemleridir. İşte bu kural sistemin çözümünün aranmasında uygulanan Gauss yok etme yönteminin genişletilmiş matris üzerinde uygulanabilirliğini sağlar. Örneklerle görelim:

ÖRNEK 33

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

$$(A : B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Genişletilmiş matrisi, basamak biçiminde bir doğrusal denklem sisteminin genişletilmiş matrisine dönüştürmek için ilkel satır işlemleri uygulayalım.

$$(A : B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

İlk satırı ikinci satır üzerinde toplayalım; ilk satırı - 3 ile çarpıp üçüncü satır üzerinde toplayalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 4 & -18 \end{array}\right)$$

İkinci satırı $\frac{7}{3}$ ile çarpıp üçüncü satır üzerinde toplayalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} & -\frac{19}{3} \end{array}\right)$$

Üçüncü satırı $\frac{3}{19}$ ile çarpalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Son yazılan blok matris basamak biçimindeki

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin genişletilmiş matrisidir. Bu sistemin üçüncü denkleminden $x_3 = -1$, ikinci denkleminden $x_2 = 2$, birinci denkleminden $x_1 = 1$ bulunur. Bu çözüm aynı zamanda verilen doğrusal denklem sisteminin bir çözümüdür.

ÖRNEK 34

$$\begin{aligned} 2x_1 - \ x_2 &= 1 \\ -6x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin çözümünü araştırınız.

ÇÖZÜM

Genişletilmiş matrisi yazıp, satır işlemleri uygulayalım:

$$(A : B) = \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

İlk satırı 3 ile çarpıp ikinci satır üzerinde toplayalım.

$$\sim \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Bu blok matris hiçbir doğrusal denklem sisteminin genişletilmiş matrisi olamaz. (Nedenini siz açıklayınız.) O halde, verilen doğrusal denklem sisteminin bir çözümü yoktur; bir başka ifade ile sistem tutarsızdır.

ÖRNEK 35

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= -7 \\ 3x_1 - x_3 &= 14 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

Katsayılar matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{için} \quad A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

olduğundan, sistemin matris gösterilişinden bilinmeyenler matrisi X i çözebiliriz:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Böylece

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -7+28 \\ -21-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

olur. O halde, sistemin çözümü $x_1 = 3$ ve $x_2 = -5$ dir.

Bu son örnek bize şunu göstermektedir: n bilinmeyenli n tane denklemden oluşan bir doğrusal denklem sisteminin katsayılar matrisi A nın tersi A^{-1} varsa, bilinmeyenler matrisi

$$X = A^{-1}B$$

dir.

ÖRNEK 36

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

Katsayılar matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nın tersi A^{-1} Gauss yöntemiyle hesaplanırsa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

bulunur. O halde,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4 \\ 9-12 \\ -6+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ve verilen sistemin çözümü $x_1 = 1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 4$ olur.

SIRA SİZDE 5

1. Aşağıdaki doğrusal denklem sistemlerinin matris gösterimlerini yazınız.

a) $$\begin{aligned} x - 2y &= -3 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + 2x_3 &= 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 \quad\quad + x_4 &= 0 \\ -x_1 \quad\quad + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

d) $3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 3$

2. Aşağıda matris gösterimleri verilen doğrusal denklem sistemlerini yazınız.

a) $$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 56 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (7)$$

3. Aşağıda verilen doğrusal denklem sistemlerinin matris gösterimlerini yazınız ve Gauss yöntemiyle çözümlerini bulunuz.

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -2 \\ x_1 + 5x_2 &= 56 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 9 \\ x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -8 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 &= 1 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi veriliyor. Önce A^{-1} matrisini bulunuz sonra da denklem sistemini çözünüz.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Cebirin temel teoremini ilk kez kanıtlayan matematikçidir. Kuramsal ve uygulamalı matematik alanlarında bir çok konuya öncülük etmiştir.

"Matematik tüm bilimlerin kraliçesi, sayılar kuramı ise matematiğin kraliçesidir."
Carl Friedrich GAUSS

"Evrenin hakimi sayıdır."
Pisagorcular

"Daha sonraki devirlerdeki sistematik aritmetiğin oluşumu ve gelişmesinin olduğu gibi, yüzyılımızdaki (19.) matematiğin özgün bilimsel fikirler sahasında meydana getirdiği hemen hemen herşeyin Gauss ile bağlantısı vardır."
Lêopold KRONECKER

Kendimizi Sınayalım

1. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_3 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin katsayılar matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & \sqrt{2} & \pi \\ x & \frac{1}{5} & 0{,}3 & y \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin a_{24}

elemanı aşağıdakilerden hangisidir?

a. x

b. π

c. y

d. 2

e. -1

3. Aşağıdakilerden hangisi üçüncü mertebeden bir birim matristir?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin devriği (transpozesi) aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

5. Aşağıdakilerden hangisi bir köşegen matristir?

a. $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

6. Aşağıdaki matrislerden hangisi basamak biçiminde bir matristir?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -34 & 5 & 0 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ -7 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & 11 \\ 0 & -3 & 5 & 4 \\ x & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

matrisleri için aralarında toplama işleminin yapılabildiği matrisler aşağıdakilerden hangisidir?

a. A ve B
b. A ve C
c. A ve D
d. B ve C
e. B ve D

8. 7. soruda verilen matrisler için aşağıdaki matris çarpımlarından hangisi tanımlıdır?

a. BA
b. BD
c. CA
d. DA
e. AD

9. $A = (1 \quad 4 \quad 7 \quad -3)$ satır matrisi ile $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ sütun matrisinin AB çarpımı hangi matristir?

a. (25)
b. (23)
c. $(-2 \quad 0 \quad 28 \quad -3)$
d. $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 28 \\ -3 \end{pmatrix}$
e. O (sıfır matris)

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ve $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

matrislerinin AB çarpım matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 32 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 32 & 6 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12. Genişletilmiş matrisi $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 7 & 0 & -1 \end{array}\right)$ olan doğrusal denklem sistemi aşağıdakilerden hangisidir?

a.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_4 - 5 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 + 3x_4 - 2 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 5 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - 2 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 - 5 &= 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2 &= 0 \\ -x_2 + 7x_3 + 1 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Biraz Daha Düşünelim

1. Bir üretici A, B, C, D, E ham maddelerini kullanarak üç çeşit mal üretmektedir. Her malın birim üretimi için gerekli hammadde miktarları kg olarak aşağıdaki tablo ile verilmektedir.

	Hammadde çeşitleri				
Ürün türleri	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
I	3	2	1	0	1
II	1	0	2	3	2
III	2	1	2	1	0

Eğer bu üretici 70 adet birinci tür, 80 adet ikinci tür ve 110 adet üçüncü türden mal üretimi siparişi alırsa, bu malların üretimi için gerekli ham madde miktarları nasıl bir matrisle temsil edilebilir? Ayrıca hammaddelerin fiyatları milyon TL/kg olarak, aşağıdaki tablo ile verilmiş ise, sipariş edilen mallar için gerekli toplam ham madde bedeli ne olur?

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
Hammadde birim fiyatları	3	1	5	4	2