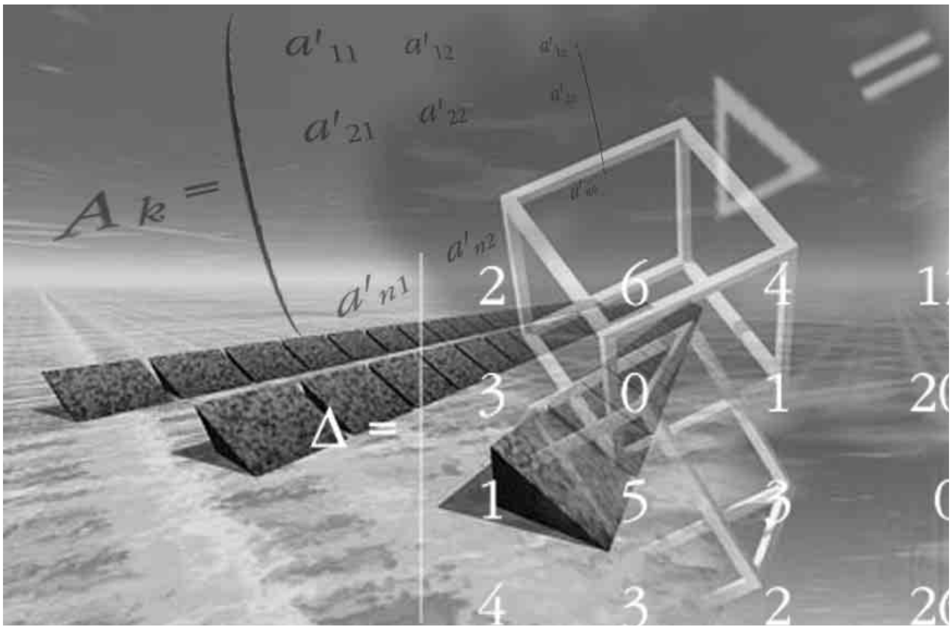
Determinantlar 13



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *determinant kavramını tanıyacak, determinantların özelliklerini öğrenecek ve bir kare matrisin determinantını hesaplayabileceksiniz,*
- *bir kare matrisin tersinin var olup olmadığına karar verebileceksiniz,*
- *tersi olan matrisin tersini, determinantı yardımıyla bulabileceksiniz,*
- *bilinmeyen sayısı, denklem sayısına eşit olan doğrusal denklem sistemlerinin çözümünü Cramer Yöntemiyle yapabileceksiniz.*

İçindekiler

- *Determinant ve Determinant Hesaplaması, Saruss Kuralı*
- *Kofaktörler ile Determinant Hesaplaması*
- *Ters Matrisin Kofaktörler ve Determinant Yardımıyla Bulunması*
- *Cramer Kuralı*

DİKKAT

- ***Kare matrisler ile determinantlar arasındaki ilişki iyi anlaşılmalıdır.***
- ***Determinantların özellikleri dikkatle incelenmelidir.***
- ***Determinant hesaplamalarında pratik kurallar iyi öğrenilmelidir.***
- ***Çözüm için bırakılan alıştırmalar kâğıt ve kalem kullanılarak çözülmelidir.***

Giriş

Elemanları sayılar olan bir kare matrise, o matrisin determinantı denilen bir sayı karşılık getirilir. Bu sayı, matrisin elemanları arasında belli kurallara göre yapılan hesaplamalar sonucu elde edilir. Bir kare matrisin determinantı olan sayının hesaplanmasına kısaca determinantın açılımı veya hesaplanması denir.

DETERMİNANT VE DETERMİNANT HESAPLANMASI

Determinant, matrisler cebirinin önemli bir kavramıdır. Kare matrisler için tanımlı olan bu kavram, matematiğin bir çok alanında, özellikle de doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerinin araştırılmasında oldukça yararlı araç niteliğindedir.

Bir matrisin determinantı belli bir kurala göre onun elemanları türünden tanımlanan bir sayıdır. Bir A kare matrisi için A nın determinantı olan bu sayı

det (A) veya $|A|$

simgelerinden biriyle gösterilir. Bazen A matrisinin elemanları doğrudan iki çizgi içine alınarak da A nın determinantı gösterilebilir. Söz gelişi,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi için A nın determinantı

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

olarak gösterilir. Şimdi bir kare matris için bu sayının nasıl tanımlandığını önce boyutu 1 x 1, 2 x 2, 3 x 3 olan matrisler için, sonra da genel n x n-li bir matris için ifade edelim.

Boyutu 1 x 1 olan bir matrisin determinantı, matrisin tek elemanı olan o sayıdır. Örneğin, $A = (-3)$ matrisi için $|A| = -3$, $B = (7)$ matrisi için $|B| = 7$; genel olarak bir $M = (m_{11})_{1x1}$ matrisi için $|M| = m_{11}$ dir.

Boyutu 2 x 2 olan bir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

matrisi için A nın determinantı köşegenleri üzerindeki elemanlarının çarpımları farkıdır; yani

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$-$ $\qquad$ $+$

formülüyle tanımlanır.

Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

matrisinin determinantını det $(A) = 1.8 - 5.7 = 8 - 35 = -27$ olarak bulunur.

Boyutu 3 x 3 olan bir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde hesaplanır:

(i) A nın ilk iki sütunu, üçüncü sütunun yanına, parantezin dışına yazılır;

(ii) Bu yazılıştan sonra aşağıda olduğu gibi A nın esas köşegenine paralel köşegenler ve ikinci köşegenine paralel köşegenler çizilir;

(iii) Esas köşegenler üzerindeki öğelerin ayrı ayrı çarpımları toplamı ile ikinci köşegenler üzerindeki öğelerin ayrı ayrı çarpımları toplamı farkı olan sayı A nın determinantıdır.

3. mertebeden bir kare matrisin determinantını bu şekilde hesaplamaya **Sarrus Kuralı** denir.

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

- - - + + +

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

formülüyle hesaplanır.

ÖRNEK 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$ ***matrisinin determinantını hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{array}$$

- - - + + +

$$\begin{aligned} |A| &= [1.4.2 + (-2).(-1).3 + 3.2.5] - [3.4.3 + 1.(-1).5 + (-2).2.2] \\ &= (8 + 6 + 30) - (36 - 5 - 8) \\ &= 44 - 23 \\ &= 21 \end{aligned}$$

KOFAKTÖRLER İLE DETERMİNANT HESAPLANMASI

Boyutu 4×4 veya daha büyük olan matrislerin determinantlarının hesaplanması için geçerli olan pratik bir kural yoktur. Şimdi herhangi bir kare matrisin determinantının hesaplanması için geçerli olan genel bir kural vereceğiz. Bu kural, **kofaktörler yoluyla determinant hesaplanması** olarak bilinen yöntemdir. Önce bir matrisin bir elemanın kofaktörünü ve matrisin kofaktörler matrisini tanımlayalım:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi verilsin. a_{ij} elemanının **minörü** diye, bu matrisin i-yinci satırı ve j-yinci sütunu atıldıktan sonra geriye kalan $(n-1)$ boyutlu matrisin determinantına denir. a_{ij} elemanının **kofaktörü** ise, a_{ij} nin minörü olan determinantın işaretli değerine denir; yani a_{ij} nin kofaktörünü a'_{ij} ile gösterecek olursak,

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

olur. A matrisinin **kofaktörler matrisi** de, A nın elemanlarının kofaktörlerinin oluşturduğu matrise denir; yani bu matrisi A_k ile gösterirsek

$$A_k = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

olur. Şimdi bir örnekle bu tanımları açıklığa kavuşturalım.

ÖRNEK 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ***matrisinde her elemanın kofaktörlerini hesaplayınız ve A nın kofaktörler matrisi A_k yı yazınız.***

ÇÖZÜM

$$a_{11} = 1 \quad \text{için} \quad a'_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \,.\, (3 + 8) = 11$$

Benzer olarak,

$$a_{12} = 0 \quad \text{için} \quad a'_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -1 \,.\, (6 - 20) = 14 \,,$$

$$a_{13} = -3 \quad \text{için} \quad a'_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \,.\, (-4 - 5) = -9 \,,$$

$$a_{21} = 2 \quad \text{için} \quad a'_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \,.\, (0 - 6) = 6 \,,$$

$$a_{22} = 1 \quad \text{için} \quad a'_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \,.\, (3 + 15) = 18 \,,$$

$$a_{23} = 4 \text{ için } a'_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2-0) = 2 \,,$$

$$a_{31} = 5 \text{ için } a'_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \,.\, (0+3) = 3 \,,$$

$$a_{32} = -2 \text{ için } a'_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \,.\, (4+6) = -10 \,,$$

$$a_{33} = 3 \text{ için } a'_{22} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \,.\, (1-0) = 1$$

bulunur. Böylece A nın kofaktörler matrisi

$$A_k = \begin{pmatrix} 11 & 14 & -9 \\ 6 & 18 & 2 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

olur.

Determinantın Kofaktörlere Göre Açılımı

n x n- li bir A matrisinin determinantını hesaplamak için A nın keyfi bir satırı veya bir sütunu seçilerek, o satırdaki veya sütundaki tüm elemanlar kofaktörleriyle çarpılıp toplandığında A matrisinin determinantı elde edilir. Formül olarak, i -yinci satır seçildiğinde

$$\det(A) = a_{i1}\, a'_{i1} + a_{i2}\, a'_{i2} + \ldots + a_{in}\, a'_{in}$$

toplamı ile ifade edilir. Bu yazılışa A nın determinantının i -yinci satırın **kofaktörlerine göre açılımı** denir. Eğer A nın j -yinci sütunu alınırsa, det (A) nın j -yinci sütunun kofaktörlerine göre açılımı

$$\det(A) = a_{1j}\, a'_{1j} + a_{2j}\, a'_{2j} + \ldots + a_{nj}\, a'_{nj}$$

olur.

A matrisinin determinantını kofaktörlere göre hesaplamak için herhangi bir satır veya sütun seçilebileceğine göre, en fazla sıfırı olan satır veya sütunun seçilmesinin hesaplamayı kolaylaştıracağı açıktır.

ÖRNEK 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ***matrisinin determinantını hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

A nın determinantını ikinci satırın kofaktörlerine göre açalım.

$a_{21} = -1$ için $a'_{21} = (-1)^{1+2} \,.\, 2 = -2$ ve $a_{22} = 3$ için $a'_{22} = (-1)^{2+2} \,.\, 1 = 1$

olduğundan

$\det(A) = a_{21}\, a'_{21} + a_{22}\, a'_{22} = (-1)(-2) + 3 \,.\, 1 = 2 + 3 = 5$

bulunur.

ÖRNEK 4

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$ ***matrisinin determinantını hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İkinci satırın kofaktörlerine göre açalım:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \,.\, (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ 2 \,.\, (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \,.\, (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2\,(-31) - 4\,(3) = -74$$

ÖRNEK 5

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ ***determinantını hesaplayınız.***

(Δ bir grek harfi olup delta diye okunur.)

ÇÖZÜM

Verilen determinantı, en çok sıfır bulunan dördüncü satırın kofaktörlerine göre açalım. Sadece $a_{42} = 8 \neq 0$ olduğundan $\Delta = a_{42} \,.\, a'_{42}$ olacaktır. O halde,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8 \,.\, (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \,.\, 3 \,.\, (-1)\,(5 + 21)$$

$$= -24 \,.\, 26 = -624$$

Determinantların Özellikleri

Matrislerin bazı özelliklerinden determinantlar için önemli özellikler çıkartılabilir. Şimdi bu özelliklerin nasıl çıkartılabildiği konusu üzerinde durmadan, doğrudan determinantlar için kimi özellikler sıralayalım.

Determinant özellikleri:

I. Bir determinantın bir satırı veya bir sütunu tümüyle sıfır ise determinantın değeri sıfırdır.

II. Bir determinantın iki satır (veya iki sütunu) yer değiştirirse, determinantın işareti değişir.

III. Bir determinantın bir satırı veya bir sütununu sabit bir *k* sayısı ile çarpıldığında elde edilen determinantın değeri, başlangıçtaki determinantın değeri ile *k* sayısının çarpımına eşittir.

IV. Bir determinantın bir satırı (veya sütunu) başka bir satırın (veya sütunun) bir katı ise, determinantın değeri sıfırdır.

V. Bir determinantın bir satırı (veya sütunu) sabit bir sayı ile çarpılıp başka bir satır (veya sütun) üzerinde toplanırsa, determinantın değeri değişmez.

Bu özellikler bir determinantın değerini hesaplamak için oldukça yararlı olabilirler. Örneğin, III ve V. özellikler kullanılarak dördüncü mertebeden bir determinantın değerinin nasıl hesaplandığına ilişkin aşağıdaki örneği dikkatle inceleyiniz.

ÖRNEK 6

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & 12 \\ 3 & 0 & 1 & 20 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 26 \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & 12 \\ 3 & 0 & 1 & 20 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 26 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 20 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 26 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -9 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \begin{vmatrix} -9 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -6 \\ -9 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -9 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -9 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1)(54 - 4) = -2 \cdot 50 = -100$$

bulunur.

[Yapılan hesaplamada şu sıra izlenmiştir: Önce birinci satırın ortak çarpanı 2 sayısı determinant dışına alınmıştır (III. özellik). Sonra, sırasıyla, birinci satır - 3, - 1, - 4 ile çarpılır ikinci satır, üçüncü satır, dördüncü satır üzerinde toplanmıştır (V. özellik). Sonra da üç sıfır bulunan birinci sütunun kofaktörlerine göre 3 x 3- lü bir determinanta indirgenmiştir. Üçlü determinantın birinci satırı - 1 ile çarpılıp üçüncü satır üzerinde toplanmıştır.]

ÖRNEK 7

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Birinci satırı 3 ile çarpıp üçüncü satır üzerinde toplayalım:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

olur. Çünkü determinantın bir satırı tümüyle sıfırdır. Bu nedenle, bu satırdaki elemanların kofaktörlerine göre açılım sıfır olur.

Ters Matrisin Kofaktörler ve Determinant Yardımıyla Bulunması

Bir A matrisinin tersi A^{-1} in var olması için gerekli ve yeterli koşulun A nın birim matrise satır eşdeğer olması olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan birim matrisin determinantı sıfırdan farklı olduğundan, birim matrise satır eşdeğer olan her matrisin determinantı da sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla, bir A matrisinin tersi A^{-1} in var olması için gerekli ve yeterli koşul A nın determinantının sıfırdan farklı olmasıdır.

Verilen A kare matrisi için A^{-1} matrisini bulmanın birçok yolu vardır. Bunlardan bazılarını daha önce görmüştük. Şimdi de kofaktörler matrisi ve det (A) yı kullanarak A^{-1} matrisini hesaplamanın bir formülünü verelim.

Bir A kare matris için det $(A) \neq 0$ ise, A^{-1} matrisi vardır ve A_k^T , A nın kofaktörler matrisinin transpozesi olmak üzere,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A_k^T$$

dir.

ÖRNEK 8

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ***matrisinin tersi A^{-1} i bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-2).4 - 1.5 = -8 - 5 = -13 \neq 0$$

olduğundan A^{-1} vardır. Önce kofatörler matrisi A^k yı bulalım.

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A_k^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

olur. Böylece

$$A^{-1} = -\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

bulunur.

ÖRNEK 9

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ***matrislerinin tersi A^{-1} i bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{array} = -1 + 24 - 20 = 3 \neq 0$$

$-\quad -\quad -\qquad\qquad +\quad +\quad +$

olduğundan A^{-1} vardır. Tüm elemanların kofaktörlerini hesaplayalım.

$$a'_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1 - 20) = -21$$

$$a'_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1(3) = -3$$

$$a'_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1(12) = 12$$

$$a'_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1(-8) = 8$$

ÇÖZÜM

$$a'_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(1) = 1$$

$$a'_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1\,(4) = -4$$

$$a'_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\,(2) = 2$$

$$a'_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1\,(5-6) = 1$$

$$a'_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\,(-1) = -1$$

$$A_k = \begin{pmatrix} -21 & -3 & 12 \\ 8 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A_k^T = \begin{pmatrix} -21 & 8 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 12 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -21 & 8 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 12 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Doğrusal Denklem Sistemlerinin Çözümleri İçin Cramer Kuralı

Bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit olan bir doğrusal denklem sistemi $AX = B$ biçiminde verilmiş olsun. Sistemin çözümü için şu durumlar söz konusudur:

$A = (a_{ij})_{nxn}$ katsayılar matrisi olmak üzere,

I. $\det(A) \neq 0$ ise, sistemin tek çözümü vardır. Bu çözüm

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det(A)} \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

biçimindedir. Burada Δ_j, A matrisinde j-yinci sütun yerine B matrisi yazılarak elde edilen matrisin determinantıdır. Bu şekilde $AX = B$ sisteminin çözümünün verilmesine **Cramer Yöntemi** denir.

II. $\det(A) = 0$ ve $\Delta_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots n$ ise, $AX = B$ sisteminin sonsuz çoklukta çözümü vardır.

III. $\det(A) = 0$ ve en az bir j için $\Delta_j \neq 0$ ise, $AX = B$ sisteminin hiç bir çözümü yoktur.

ÖRNEK 10

$2x_1 - 3x_2 = 40$
$5x_1 + x_2 = 15$

doğrusal denklem sistemini Cramer Yöntemiyle çözünüz.

ÇÖZÜM

Sistemi $AX = B$ biçiminde yazarsak,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \end{pmatrix}$$

olur. Böylece

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 15 = 17 \neq 0$$

olduğundan Cramer Yöntemine göre

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 40 & -3 \\ 15 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{40 + 45}{17} = \frac{85}{17} = 5$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 40 \\ 5 & 15 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{30 - 200}{17} = \frac{-170}{17} = -10$$

bulunur.

ÖRNEK 11

$3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + 3x_2 - x_3 = -9$
$2x_1 - x_2 = -4$

doğrusal denklem sistemini Cramer Yöntemiyle çözünüz.

ÇÖZÜM

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

olduğundan Cramer Yöntemiyle sistemin çözümü

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -9 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-14}{-2} = 7$$

olarak bulunur.

ÖRNEK 12

Bir firma X, Y, Z ham maddelerini çeşitli oranlarda kullanarak A, B, C mallarını üretiyor. Bu malların her birinin birim üretimi için gerekli ham madde miktarları (birim olarak) aşağıdaki tablo ile verilmektedir.

Ham madde	*A ürünü*	*B ürünü*	*C ürünü*
X	*4*	*0*	*9*
Y	*6*	*5*	*1*
Z	*0*	*2*	*8*

Eğer 112 birim X ham maddesi, 93 birim Y ham maddesi ve 74 birim Z ham maddesi bütünüyle kullanılırsa, elde edilecek ürün sayıları ne olur?

ÇÖZÜM

x_1 = elde edilecek A ürünü sayısı
x_2 = " " B " "
x_3 = " " C " "

olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} 4x_1 \quad\quad\; + 9x_3 &= 112 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_3 &= 93 \\ 2x_2 + 8x_3 &= 74 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Şimdi bu sistemi Cramer Yöntemiyle çözelim. Katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 6 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 160 + 108 - 8 = 260$$

olduğuna göre

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 112 & 0 & 9 \\ 93 & 5 & 1 \\ 74 & 2 & 8 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2600}{260} = 10$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 112 & 9 \\ 6 & 93 & 1 \\ 0 & 74 & 8 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1300}{260} = 5$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 112 \\ 6 & 5 & 93 \\ 0 & 2 & 74 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2080}{260} = 8$$

bulunur.

SIRA SİZDE 1

Aşağıda verilen matrislerin determinantlarını hesaplayınız.

1. $A = (-3)$,

2. $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$,

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

5. $E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

Aşağıda verilen determinantları hesaplayınız.

6. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$,

7. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,

8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrisinin kofaktörler matrisi A_k yı bulunuz.

9. Sekizinci örnekteki A matrisinin tersini bulunuz.

10.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 4x_1 + x_2 &= -3 \\ -9x_1 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$
denklem sisteminin çözümünü Cramer Yöntemiyle bulunuz.

11. $AX = B$ biçimindeki bir doğrusal denklem sisteminin çözümü, matris çarpımı biçiminde

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ise, bu doğrusal denklem sisteminin açık yazılışı nedir? Sistemin çözümünü bulunuz.

12. A ve B olarak adlandırılan iki tür malın üretildiği bir atölyede her bir malın bir adet üretimi için gerekli para ve iş saati aşağıdaki tablo ile verilmektedir.

	A	**B**
Para (milyon TL)	**7**	**5**
Zaman (saat)	**4**	**3**

Eğer bu atölyede 11.3 milyar TL ve 6600 iş saati tümüyle bu malların üretimi için harcanırsa, her bir maldan kaç adet üretilmiş olur?

Kendimizi Sınayalım

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bularak işaretleyiniz.

1. $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

matrisinin kofaktörler matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\begin{pmatrix} 8 & 16 & 8 \\ -18 & 2 & -22 \\ 17 & -76 & -29 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 8 & -18 & 17 \\ 16 & 2 & -22 \\ 8 & -76 & -29 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 17 & -18 & -8 \\ -76 & 2 & 16 \\ -29 & -22 & 8 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -29 & -76 & 17 \\ -22 & 2 & -18 \\ 8 & 16 & -8 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} -8 & 16 & 8 \\ 5 & -28 & -17 \\ 17 & -76 & -29 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

matrisinin determinantı aşağıdaki sayılardan hangisidir?

a. -39
b. -23
c. 0
d. 19
e. 23

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4. Aşağıdaki matrislerden hagisinin tersi yoktur?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

determinantı aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(x - y)\ (x - z)\ (z - y)$
b. 0
c. $(x + y)\ (x + z)\ (z + y)$
d. $x^2\ y^2\ z^2$
e. xyz

Biraz Daha Düşünelim

1. Aşağıda genişletilmiş matrisleri verilen denklem sistemlerinden çözümü olanların çözümlerini bulunuz.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

2. Aşağıdaki matrislerden hangisinin tersi vardır? Ters matrisi bulunuz.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 12 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 9 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

matrisinin determinantını hesaplayınız.

4. Bir deri çanta üreticisinin imalâthanesinde, evrak çantası, el çantası ve cüzdan üretilmektedir. Her bir ürünün birim üretimi için gerekli olan zaman iş saati olarak aşağıdaki tablo ile verilmektedir.

	Kesme	Dikme	Cilalama
Evrak çantası	2	2	1
El çantası	1	1	1
Cüzdan	0,5	1	1

Bu imalâthane bir günde 125 iş saati kesme, 150 iş saati dikme ve 120 iş saati cilâlama kapasitesine sahip ise, tam kapasite ile kullanıldığında bir günde üretilen ürün sayıları ne olur?