2006-2007 Eğitim- Öğretim Yılı Güz Dönemi
Diferansiyel Denklemler Çalışma Soruları 2

1) $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+(\dfrac{dy}{dx})^2+1=0$ diferansiyel denklemini çözünüz

2) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

3) $y''+6y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz ve diferansiyel denklemin çözümlerinin temel cümlesi olup olmadığını araştırınız.

4) $y''+3y'+2y=0$ $y(0)=2$ $y'(0)=1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

5) $y''-7y'+10y=6t+8e^{2t}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

6) $y''+7y'+12y=\sin 2x+e^{-3x}+4$ diferansiyel denklemini çözünüz.

7) $y''-5y'+4y=-4(x^2+1)e^{3x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

8) $y''+y=\sin x$ diferansiyel denklemini parametrelerin değişimi metodunu kullnarak çözünüz

9) $(2-t)y'''+(2t-3)y''-ty+y=0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü $y_1(t)=e^t$ olduğuna göre, mertebe düşürme metodunu kullanarak $y_2(t)$ yi hesaplayınız.

10) $y'''+y'=\dfrac{1}{\sin x}$ **0<x<π** diferansiyel denklemini parametrelerin değişimi metodunu kullanarak çözünüz

11*)* $y'''-4y''+y'+6y=\sin 4x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü belirsiz katsayılar metodunu kullanarak bulunuz.

12) $y'''-2y''+17=8+e^{2x}\cos 5x+x^2e^x\sin 4x+(x+1)$ diferansiyel denkleminin homojen kısmın çözümünü elde ediniz. Sağ taraf için belirsiz katsayılar yöntemiyle özel çözümünü katsayıları hesaplamadan çözünüz

SORU) $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+(\dfrac{dy}{dx})^2+1=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{(1+x^2)}((\frac{dy}{dx})^2)+1) \qquad y''=f(x,y') \text{ tipi}$$

$\dfrac{dy}{dx}=y'=p \qquad y''=\dfrac{dp}{dx}$ ifadeleri dif. denklemde yerlerine konulursa

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{1}{(1+x^2)}(p^2+1) \qquad \frac{dp}{(p^2+1)}=-\frac{1}{(1+x^2)}dx$$

Arctanp=-Arctanx/arctanc p=-x/c

$\dfrac{dy}{dx}=y'=p$ idi. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{c}$ y=$-\dfrac{x^2}{2c}+c_1$

Soru2) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}{x} \qquad y''=f(x,y') \text{ tipi}$$

$\dfrac{dy}{dx}=y'=p \qquad y''=\dfrac{dp}{dx}$ ifadeleri dif. denklemde yerlerine konulursa

$$\frac{dp}{dx}=\frac{\sqrt{1+p^2}}{x} \qquad \frac{dx}{x}=\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

Hatırlatma: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left[\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]$

Lnx+lnc=ln(p+$\sqrt{1+p^2}$) $\rightarrow$ cx= p+$\sqrt{1+p^2}$ $\rightarrow$ cx-p= $\sqrt{1+p^2}$ 2 tarafın karesi alınırsa

$c^2x^2 - 2cxp + p^2 = 1 + p^2 \quad \rightarrow \quad c^2x^2 - 1 = 2cxp \quad \rightarrow \quad p = \frac{c^2x^2-1}{2cx} = \frac{cx}{2} - \frac{1}{2cx}$

p=$\frac{dy}{dx}$ idi. $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{cx}{2} - \frac{1}{2cx} \quad \rightarrow dy = \frac{cx}{2} - \frac{1}{2cx}dx$

$$\rightarrow \quad y = \frac{cx^2}{4} - \frac{\ln x}{2c} + c_1$$

SORU3) $y'' + 6y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz ve diferansiyel denklemin çözümlerinin temel cümlesi olup olmadığını araştırınız.

$y'' = r^2$

$y' = r$ yazılarak $r^2 + 6 = 0$ karakteristik denklemden kompleks kök

$y = 1 \quad \alpha = -\frac{b}{2a} = 0 \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \sqrt{6}$

$r_1 = 0 + i\sqrt{6} \quad r_2 = 0 - i\sqrt{6}$

$y_h = e^{\alpha x}$ (c_2Cosβx+c_3Sinβx)

y_h= (c_1Cos$\sqrt{6}$ x+c_2Sin$\sqrt{6}$ x)

$$W = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{6x} & \sin\sqrt{6x} \\ -\sqrt{6}\sin\sqrt{6x} & \sqrt{6}\cos\sqrt{6x} \end{pmatrix} = \sqrt{6} \neq 0$$ çözümlerin temel cümlesidir.

4) $y'' + 3y' + 2y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$y'' + 3y' + 2y = 0$ **ile homojen çözüm yapılarak**

$y'' = r^2$

$y' = r$ yazılarak $r^2 + 3r + 2 = 0$ karakteristik denklemden

$y = 1$

$r^2+3r+2=0 \quad r_1=-1 \quad r_2=-2$ **2 farklı reel kök**

$$y_{\text{hom}ojen}=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$$

$$y'=-c_1e^{-x}-2c_2e^{-2x}$$

$y(0)=2$ **için** $\qquad c_1+c_2=2$

$y'(0)=1$ **için** $\qquad -c_1-2c_2=1$

c_1=5 c_2=-3 $\qquad y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x} \qquad y=5e^{-x}-3e^{-2x}$

Soru5) ***y''-7y'+10y=6t+8e^{2t}*** ***diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.***

Çözüm:

önce denklem 0 a eşitlenerek homojen kısmın çözümü bulunur.

r^2-7r+10=0 karakteristik denklem
(r-2)(r-5)=0 r_1=2 , r_2=5

$$y_{homogen}=c_1e^{2t}+c_2e^{5t}$$

Eşitliğin sağ tarafı doğru denklemi ve üstel fonksiyonun toplamı olduğundan özel çözüm olarak doğru denklemi ve üstel fonksiyon için ayrı ayrı özel çözümler seçilir.

0 *karakteristik denklemin* ***kökü olmadığından***

$y_{özel1}$=At+B ***seçilerek türevler(y' ve y'') alınır, verilen denklemde yerlerine konularak katsayılar hesaplanır.***
y'= A y''=0

-7 A+10(At+B)=6t10At+10 B--7 A=6t

10At=6t= A= 6/10=3/5
10 B--7 A=0 B=21/50

$$y_{özel1}=3/5t+21/50$$

Verilen Üstel fonksiyonda (8e^{2t}) t nin katsayısı 2 karakteristik denklemin basit bir kökü olduğundan

$$y_{özel2}=tDe^{2t}$$

y'=2tDe^{2t}+De^{2t}

y''=2De^{2t}+4tDe^{2t}+2De^{2t}

$2De^{2t}+4tDe^{2t}+2De^{2t}-7(2tDe^{2t}+De^{2t})+10tDe^{2t}=8\ e^{2t}$
$4De^{2t}==8\ e^{2t}$
$D=2$

$$y_{özel2}=tDe^{2t}=2te^{2t}$$

genel çözüm;

$$y_{genel}=y_{homogen}+y_{özel}$$

$$y_{genel}=c_1e^{2t}+c_2e^{5t}+2te^{2t}+3/5t+21/50$$

Soru 6) $y''+7y'+12y=\sin 2x+e^{-3x}+4$ **diferansiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm:

$y''+7y'+12y=0$ **ile homojen çözüm yapılarak**

$y''=r^2$
$y'=r$ yazılarak $r^2+7r+12=0$ karakteristik denklemden
$y=1$

$r^2+7r+12=0$ $r_1=-3$ $r_2=-4$ **2 farklı reel kök**

$$y_{\hom ojen}=c_1e^{-3x}+c_2e^{-4x}$$

bulunur.

Özel çözümler
Sin2x için
i2 karakteristik denklemin kökü olmadığından $y_{özel1}=A\cos 2x+B\sin 2x$
seçilerek

$y_{özel1}=A\cos 2x+B\sin 2x$
$y'_{özel1}=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$
$y''_{özel1}=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$

ile $\sin 2x(-14A+8B)+\cos 2x(8A+14B)=\sin 2x$

$-14A+8B=1$ $\quad\quad$ *A=-7/30 , B=4/30*

$8A+14B=0$

$$y_{özel1}=-\frac{7}{30}\cos 2x+\frac{4}{30}\sin 2x$$

e^{-3x} için özel çözüm

üstel fonksiyonda x'in katsayısı (-3), karakteristik denklemin kökü olduğundan

Ae^{-3x} seçilerek

$y_{özel2}=Axe^{-3x}$

$y'_{özel2}=Ae^{-3x}-3Axe^{-3x}$

$y''_{özel2}=-6Ae^{-3x}+9Axe^{-3x}$ diferansiyel denklemde yerlerine konularak

$Ae^{-3x}=e^{-3x}$ den A=1 ve

$$y_{özel2}=xe^{-3x}$$

bulunur.

Sabit sayı (4) için,

y ' ifade olduğundan sabit sayı y nin katsayısına oranlanır. $y_{özel3}=4/12=1/3$

$$y_{genel}=y_h+y_{özel1}+y_{özel2}+y_{özel3}$$

$$y_{genel}=c_1e^{-3x}+c_2e^{-4x}-\frac{7}{30}\cos 2x+\frac{4}{30}\sin 2x+xe^{-3x}\mathbf{+1/3}$$

elde edilir.

7) $y''-5y'+4y=-4(x^2+1)e^{3x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$y''=r^2$

$y'=r$ $\quad$ yazılarak $\quad r^2-5r+4=0$ $\quad$ karakteristik denklemden

$y=1$

$r^2-5r+4=0$ $\quad r_1=1$ $\quad r_2=4$ **2 farklı reel kök**

$$y_{homojen}=c_1e^{x}+c_2e^{4x}$$

üstel fonksiyonnda x in katsayısı olan 3 değeri karakteristik denklemin <u>kökü olmadığından</u>

$y_{özel}=(Ax^2+Bx+C)e^{3x}$ seçilerek türevler alınır ve verilen diferansiyel denklemde yerlerine konarak *A,B ve* C katsayıları belirlenir.

-2 $(Ax^2+Bx+C)+2Ax+B+2A=-4(x^2+1)$ den

A=2 , B=2 ve C=5 elde edilir. $y_{özel}=(2x^2+2x+5)e^{3x}$

$$y_{genel}=y_h+y_{özel}=c_1e^x+c_2e^{4x}+(2x^2+2x+5)e^{3x}$$

8) $y''+y=\sin x$ diferansiyel denklemini parametrelerin değişimi metodunu kullanarak çözünüz

$y''+y=0$ denkleminin karakteristik denklemi $r^2+1=0$ ve kökleri r=±i olup genel çözümü **$y=e^{\alpha t}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$ den**

$$\mathbf{y=c_1Cosx+c_2Sinx}$$

$W.u'=\varepsilon_n$ sistemini yazarsak

$$\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \sin x\end{pmatrix}$$

u_1' Cosx+u_2' Sinx=0 /*Sinx
-u_1' Sinx+u_2' Cosx=sinx /*Cosx ile çarparsak

u_2'= Sinx cosx $u_2=-(\cos^2x)/2+K_2$
u_1' = -$\sin^2$x $u_1= -(x/2-(\sin 2x)/4)+K_1$

Hatırlatma:$\int\sin^2x dx= x/2-(\sin 2x)/4$

u_1, u_2 (y= u_1Cosx+u_2Sinx) yerlerine konarak yani(Y=W.u) ile

$$y_{genel}=K_1\cos x+K_2\sin x-(x/2)\cos x-((\cos^2x)/2)\sin x-(\sin 2x*\cos x)/4$$

9) $(2-t)y'''+(2t-3)y''-ty+y=0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü $y_1(t)=e^t$ olduğuna göre, mertebe düşürme metodunu kullanarak $y_2(t)$ yi hesaplayınız.

10) $y''' + y' = \dfrac{1}{\sin x}$ **0<x<π** *diferansiyel denklemini çözünüz.*

$y''' = r^3$

$y'' = r^2$ yazılarak $r^3 + r = 0$ karakteristik denklemden

$y' = r$ $r(r^2+1) = 0$ $r_1 = 0$ $r_{2,3} = 0 \pm i1$ **reel ve kompleks**

$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + e^{\alpha x}(c_2 \cos\beta x + c_3 \sin\beta x)$$

$$y_h = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

Parametrelerin değişimi yöntemine göre;

$y_{özel} = u_1 + u_2 \cos x + u_3 \sin x$ yazılarak

$u_1' + u_2' \cos x + u_3' \sin x = 0$ **(1)**

$-u_2' \sin x + u_3' \cos x = 0$ **(2)**

$-u_2' \cos x - u_3' \sin x = 1/\sin x$ **(3)**

(1) ve **(3)** den $u_1' = \dfrac{1}{\sin x}$ $u_1 = -\ln(\csc x + \cot x)$

(2) ve **(3)** den $u_3' = -1$ $u_3 = -x$

(2) den $u_2' = u_3' \cot x = -\cot x = -\dfrac{\cos x}{\sin x}$ $u_2 = -\ln(\sin x)$

$y_{özel} = u_1 + u_2 \cos x + u_3 \sin x$ **de yerlerine yazılarak**

$y_{özel} = -\ln(\csc x + \cot x) - \cos x \ln \sin x - x \sin x$

$y_{genel} = y_h + y_{özel} = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x - \ln(\csc x + \cot x) - \cos x \ln \sin x - x \sin x$

Hatırlatma: $\int (1/\sin ax)dx = 1/a \ln(\csc(ax) + \cot(ax))$

11) $y''' - 4y'' + y' + 6y = \sin 4x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü belirsiz katsayılar metodunu kullanarak bulunuz.

$y''' = r^3$

$y'' = r^2$ yazılarak $r^3 - 4r^2 + r + 6 = 0$ karakteristik denklemden

$y' = r$ $(r+1)(r^2 - 5r + 6) = 0$ $r_1 = -1$**,** $r_2 = 2$**,** $r_3 = 3$ **reel vefarklı 3 kök**

$$y_{\hom ojen} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$$

sin4x için ($\sin \beta x$ **de i4 karakteristik denklemin kökü olmadığından)**

$y_{özel}$=Acos4x+*B*sin4x olarak seçilir.

$y' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x$

$y'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x$

$y''' = 64A\sin 4x - 64B\cos 4x$

ifadeleri verilen diferansiyel denklemde yerlerine konursa

A=12/1565 ; B=13/1565

$y_{özel}$=12/1565 cos4x+13/1565 *s*in4x

$$y_{genel} = y_{\hom ojen} + y_{özel}$$

y_{genel}= $c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$ +12/1565 cos4x+13/1565 *s*in4x

12) $y''' - 2y'' + 17y' = 8 + e^{2x}\cos 5x + x^2 e^x \sin 4x + (x+1)$ *diferansiyel denkleminin homojen kısmınn çözümünü elde ediniz. Sağ taraf için belirsiz katsayılar yöntemiyle özel çözümünü katsayıları hesaplamadan çözünüz*

$y''' = r^3$

$y'' = r^2$ yazılarak $r^3 - 2r^2 + 17r = 0$ karakteristik denklemden

$y' = r$ $r(r^2 - 2r + 17) = 0$ $r_1 = 0$ $r_{2,3} = 1 \pm i4$ **reel ve kompleks**

y_h=$c_1 e^{r1x}$ +$e^{\alpha x}$ (*c_2*Cosβx+*c_3*Sinβx)

y_h=c_1 + e^x (*c_2*Cos4x+*c_3*Sin4x)

8 için özel çözüm:

(0 karakteristik denklemin **BASİT** kökü olduğu için)

$y_{özel1} = Ax$

$e^{2x}\cos 5x$ **için özel çözüm:**
($e^{\alpha x}\cos\beta x$ de, ($(\alpha \pm i\beta)$; $(2 \pm i5)$) karakteristik denklemin **KÖKÜ OLMADIĞI** için)

$y_{özel2} = e^{\alpha x}(B\cos\beta x + C\sin\beta x) = e^{2x}(B\cos 5x + C\sin 5x)$ **olarak seçilir.**

$x^2e^x\sin 4x$ için özel çözüm:

($x^n e^{\alpha x}\sin\beta x$ **de,** ($(\alpha \pm i\beta)$; $(1 \pm i4)$) karakteristik denklemin basit **KÖKÜ olduğu** için için)
$y_{özel3} = xe^{\alpha x}\cos\beta x(Dx^2 + Fx + G) + e^{\alpha x}\sin\beta x(Hx^2 + Ix + J)$ **olarak seçilir.**

$y_{özel3} = xe^{x}\cos 4x(Dx^2 + Fx + G) + e^{x}\sin 4x(Hx^2 + Ix + J)$

x+1 için özel çözüm:

((0 karakteristik denklemin **BASİT** kökü olduğu için)

$y_{özel4} = x(Kx + L)$
$y_{genel} = y_h + y_{özel1} + y_{özel2} + y_{özel3} + y_{özel4}$