İKİNCİ DERECE DENKLEMLERİN SERİ ÇÖZÜMÜ

$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ **kuvvet serisi**

1) Eğer bir kuvvet serisinin kısmi toplamlar dizisinin $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n (x-x_0)^n$ limiti var ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisine x noktasında **yakınsak** denir. Eğer kuvvet serisi bir x noktasında yakınsak değil ise, bu x noktasında **ıraksak**tır.

2) Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n (x-x_0)^n \right|$ kuvvet serisi bir x noktasında yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisine **‘*mutlak yakınsak*’** seri denir. Eğer bir seri mutlak yakınsak ise kendiside yakınsaktır. Fakat tersi herzaman doğru değildir.

3) Bir kuvvet serisinin mutlak yakınsaklığının araştırılmasında kullanılan testlerden birisi oran testidir.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n (x-x_0)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left|(x-x_0)\right| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

limiti varsa, L<1 koşulunu sağlayan x değerleri için yakınsaktır.

L<1 için *Yakınsak*
L>1 için *Iraksak* *L=∞ ise*
L=1 için *Testle karar verilemez.*

Örnek:

$\sum_{n\to 1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (x-2)^n$ **serisi hangi x değerleri için yakınsaktır**

$$\lim_{n\to\infty} \left|(x-x_0)\right| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left|x-2\right| \left| \frac{n+1}{n} \right| = x-2$$

|x-2| <1 için veya -1<x-2<1 1<x<3 için yakınsak
|x-2| >1 için ıraksaktır. |x-2| =1 için x=1 ve x=3 için seri ayrıca incelenir

x=1 için $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (1-2)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} n$ **sonlu bir değer olmadığından ıraksaktır.**

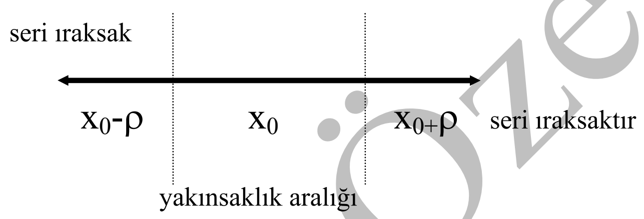
x=3 için $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (3-2)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$ **ıraksaktır.**

4) Eğer $x=x_1$ noktasında $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisi yakınsak ise,bu takdirde $|x-x_0| < |x_1-x_0|$ için mutlak yakınsak ve eğer $x=x_1$ noktasında kuvvet serisi ıraksak ise $|x-x_0| > |x_1-x_0|$ içinde ıraksaktır.

5) Reel ve pozitif bir ρ sayısı için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisi $|x-x_0| < \rho$ için mutlak yakınsak ve $|x-x_0| > \rho$ için ıraksak ise ρ ya **'yakınsaklık yarıçapı'** denir.

-Bir kuvvet serisi sadece bir x_0 noktasında yakınsak ise **ρ=0 dır.**
-Eğer kuvvet serisi her x için yakınsak ise **ρ=∞ dır.**
-Eğerρ>0 olmak üzere $|x-x_0| < \rho$ aralığında seri yakınsak ise bu aralığa '***yakınsaklık aralığı'*** denir.

$|x-x_0| = \rho$ yi sağlayan noktalarda seri yakınsakta, ıraksakta olabilir.



Örnek:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n};\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\frac{n2^n}{(x+1)^n}\right| = |x+1|\left|\frac{n}{(n+1)2}\right| = \frac{|x+1|}{2}$$

$\frac{|x+1|}{2}<1$ $\quad |x+1|<2$ $\quad -2< x+1 <2$ $\quad -3< x< 1$

x=-3 için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

seri yakınsaktır. Fakat mutlak yakınsak değildir. Bu nedenle seri şartlı yakınsaktır.

$1/n > 1/(n+1)$ $\quad a_n > a_{n+1}$ $\quad \lim (1/n) = 0$ ıraksak

x=1 için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksaktır.

Mutlak yakınsak olduğu aralık $-3< x< 1$ dir

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ **ve** $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ serileri sırası ile f(x) ve g(x) fonksiyonlarına yakınsıyorlarsa

$|$ **x-x$_0$**$|$ < ρ **için** f(x) $\neq$g(x)

6) f(x) ±g(x)= $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$

7) f(x) *g(x)= $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n * \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$

f(x) / g(x)= $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n$ **yakınsaktırlar.**

8) $|$ x-x$_0$$|$ < ρ aralığındaki her x için f fonksiyonu sürekli ise, f', f'',..... türevleri de bu aralıkta süreklidir.

y=f(x)=a$_0$+a$_1$(x-x$_0$)+a$_2$(x-x$_0$)^2+........ $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

y'=f'(x)=a$_1$+2a$_2$(x-x$_0$)+......+(n-1)a$_{n-1}$(x-x$_0$)$^{n-2}$ +n a$_n$(x-x$_0$)$^{n-1}$= $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$

y''= f$''$(x)= **2a$_2$+.....+(n-1)(n-2)a$_{n-1}$(x-x$_0$)$^{n-3}$+....** $= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$

9) f fonksiyonu x=x$_0$ noktası civarında a$_n$=(f^n(x$_0$)/n ile

f(x)= $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n}(x-x_0)^n$ **şeklinde yazılabiliyorsa buna taylor serisi denir.**

10) Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ **her x için sağlanıyorsa a$_n$=b$_n$ n=1,2...**

Ayrıca her x için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ **=0 ise a$_0$=a$_1$=a$_2$=........=a$_n$=0 olur.**

Eğer f fonksiyonu bir x=x$_0$ noktası civarında ρ>0 olmak üzere yakınsaklık yarıçapı ρ olan bir taylor serisinin açılımı şeklinde yazılabiliyorsa, bu fonksiyona x=x$_0$ noktasında analitiktir denir.

Ayrıca 6.ve 7. maddeden f ve g fonksiyonları bir x=x$_0$ noktasında analitik iseler, bu takdirde f(x) ±g(x), f(x) *g(x), f(x) / g(x) koşulu ile, **x=x$_0$ noktasında analitiktir.(x$_0$ noktası civarında türevi vardır).**

İNDEKS DEĞİŞİMİ

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n (x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n (x-x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3) a_{n+2} (x-x_0)^n \quad \textbf{n=n+2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (r+n-1) a_{n-1} x^{r+n} \qquad \textbf{n=n-1}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **iki serinin birbirine eşit olması için**

$(n+1)a_{n+1}=a_n$ olmalıdır.

ADİ NOKTA,TEKİL NOKTA, DÜZGÜN TEKİL NOKTA VE DÜZGÜN OLMAYAN TEKİL NOKTA TANIMLARI

P(x),Q(x),R(x) fonksiyonları polinom olmak üzere

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

veya $P(x) \neq 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Q(x)}{P(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0 \Rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

denklemi için

$P(x) \neq 0$ şartını sağlayan $x=x_0$ noktasına ***'adi nokta'*** denir,
$P(x)=0$ koşulunu sağlayan $x=x_0$ noktasına(1) denkleminin '***singular (tekil)noktası'*** denir.

$\lim_{x \to x_0} (x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$ **sonlu** , $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$ **sonlu**

ise bu koşulları sağlayan x_0 noktasına

$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0$ denkleminin ***'Regüler-Singüler Noktası'*** denir.

Herhangi bir singüler noktası regüler-singüler nokta değilse bu noktaya $P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0$ denkleminin ***'irregüler-singüler noktası'*** denir

örnek:

1) $(x^2-4)y''+2xy'+ay=0$ a sabit diferansiyel denkleminin adi ve tekil noktalarını belirleyiniz.

$P(x)=(x^2-4)=0$ **$x=\pm 2$ tekil noktalar**

bunun dışında kalan diğer tüm noktalar adi noktalardır.

2) $x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$ diferansiyel denkleminin adi ve tekil noktalarını belirleyiniz.

$P(x)=0$ ile $(x^2=0$ **$x=0$ tekil nokta**, **diğer tüm noktalar adi noktadır.**)

BİR ADİ NOKTA CİVARINDA SERİ ÇÖZÜMLERİ

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0 \qquad \textbf{(1)}$$

2.dereceden lineer denklemin çözümünü bulmak için yöntemler arıyoruz. (1) denklemine örnek olarak,

- **$x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0$ v (sabit) (BESSEL DENKLEMİ)**
- **$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ α(sabit)(LEGENDRE DENKLEMİ)**
- **$y''-\lambda xy=0$ λ sabit (AIRY DENKLEMİ)**
- **$y''-2xy'+2ny=0$, n bir tamsayı (HERMITE DENKLEMİ)**

(1) **denklemindeki P(x),Q(x),R(x) fonksiyonları polinom olarak ele alınmıştır(daha sonra bu fonksiyonlar değişik tiplerde ele alınacaktır).**

$P(x)\neq 0$ şartını sağlayan $x=x_0$ noktasına ***'adi nokta'*** denir, bu x_0 noktasının uygun bir civarında $P(x)\neq 0$ olur ve (1) denklemi

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{Q(x)}{P(x)}\frac{dy}{dx}+\frac{R(x)}{P(x)}y=0 \Rightarrow y^{"}+p(x)y^{'}+q(x)y=0 \qquad \textbf{(2)}$$

şeklinde yazılabilir.

$P(x_0)=0$ koşulunu sağlayan $x=x_0$ noktasına(1) denkleminin ***'singular (tekil)noktası'*** denir. (1) denkleminin çözümleri x_0 adi noktasının civarında

$$\mathbf{y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+........} \quad =\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad \textbf{(3)}$$

şeklinde ararız**.** Bu serilerin $|x-x_0|<\rho$, $\rho>0$ aralığında yakınsadığı farz edilmektedir. a_n katsayıları (3) denklemi ve bu denklemin $y^{'}$ ve $y^{''}$ türevleri alınıp bunlar (1) nolu denklemde yerlerine konularak bulunurlar

Örnek:

$\mathbf{y^{''}+y=0,\ (4)\ \ -\infty<x<\infty}$ $\quad$ **y=**$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)^n$ **şeklinde çözünüz.**

çözüm:

Verilen denklemde **P(x)=1,Q(x)=0,R(x)=1 böylece her nokta adi noktadır. Burada x_0=0 alabiliriz. x_0=0 noktasının civarında kuvvet serine bakarsak**

$$\mathbf{y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4........} \quad =\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)^n \qquad \textbf{(5)}$$

$$y^{'}=a_1+2a_2x+......+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \qquad \textbf{(6)}$$

$$y^{''}=2a_2+.....+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+....=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} \qquad \textbf{(7)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)^n=\mathbf{0}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)^n=\mathbf{0}$$

veya

$\sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n)x^n=0$ olur. Bu denklemin her x için sağlanabilmesi için x in her mertebeden teriminin katsayısı ***'0'*** olmalıdır

(n+2)(n+1)a_{n+2}+$a_{n=}$0 yardımı ile $a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$ **elde edilir.**

n yerine 0.1,2,3.... verilerek katsayılar belirlenir. bu denklem bir regürans bağıntısı(katsayılar arasındaki bağıntıyı verir)dır.

n=0 için $a_2 = -\frac{a_0}{2*1}$ **a_3=- a_1/3*2 = - a_1/3!**
a_4=- a_2/4*3 = a_0/4*3*2= a_0/4!
a_5=- a_3/5*4 = a_1/5*4*3*2= a_1/5!

a_0 ve a_1 e bağlıdır.

Çift ve tek katsayılar aşağıdaki şekilde

$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2k!}$ $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!}$ **yazabiliriz.**

katsayılar (5) denkleminde yerlerine konur

y= a_0+a_1x+$a_2$$x^2$+$a_3$$x^3$+........+$a_n$$x^n$

y= $a_0+a_1x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \quad + \frac{(-1)^k a_0}{2k!}x^{2k} + \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

y= $a_0(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!}) + a_1(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!})$

elde edilir. Bu serilerden birincisi Cosx in x=0 noktasındaki taylor serisine, ikinci Sinx in x=0 noktasındaki taylor serisine açılımına eşit olduğu görülür .O halde çözümü

y=a_0Cosx + a_1Sinx

şeklinde yazabiliriz. Burada a_0 ve a_1 e bir şart konmamıştır. (5) ve(6) denklemlerinden x=0 için y ve y' den buluruz.y(0) vey'(0) başlangıç koşulları keyfi olarak seçildiği için a_0 ve a_1 de keyfidir. Ancak özel olarak seçilirlerse belirli olurlar.

Örnek2

y''-xy=0, −∞<x<∞y=$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$ **şeklinde çözünüz.**

Çözüm:

Verilen denklemde **$P(x)=1, Q(x)=0, R(x)=-x$ böylece her nokta adi noktadır. Burada $x_0=0$ alabiliriz. $x_0=0$ noktasının civarında kuvvet serine bakarsak**

$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4........ \quad =\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$

$y'=a_1+2a_2x+......+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$

$y''=2a_2+.....+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+.... =\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

denklemde yerlerine konulursa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

x^n parantezine alabilmek için bu eşitliğin sağ tarafındaki serinin indisini ötelersek yani n=1 den başlatıp n=n-1 yazarsak ve sol tarafdaki seriyi n=1 den başlayacak şekilde yazarsak

$\mathbf{2a_2}+\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \quad 2a_2+3.2a_3x+4.3a_4x^2.....= a_0x+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^3$

$a_2=0$ olmalıdır. $\qquad$ ($2a_2=0$, $3.2a_3x=a_0x$, $4.3a_4x^2=a_1x^2$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1})x^n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

olur.

n=1 için	**$a_3=a_0/3*2$**
n=2 için	**$a_4=a_1/4*3$**
n=3 için	**$a_5=a_2/5*4=0$**
n=4 için	**$a_6=a_3/6*5=a_0/6*5*3*2$**

n=5 için **$a_7=a_4/7*6=a_1/7*6*4*3$** **a_0 ve a_1 e bağlı**

$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+........$
$y=a_0+a_1x+$ **$a_0/3*2$** x^3+ **$a_1/4*3$** $x^4+.......$

$$\mathbf{y= a_0(1+ x^3/6+x^6/180...)+a_1(x+x^4/12+x^7/504.....)}$$

Yukarıdaki eşitlikte parantez içlerine sırası ile y_1 ve y_2 diyelim. $a_0=1$, $a_1=0$ seçelim daha sonra da $a_0=0$, $a_1=1$ olarak seçelim. Buradan y_1 ve y_2 nin ayrı ayrı verilen diferansiyel denklemin çözümleri olduğu görülür. y_1 fonksiyonu $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$ başlangıç koşullarını sağlar ve y_2 fonksiyonu $y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$ başlangıç koşullarını sağlar. Sonuç olarak y_1 ve y_2 lineer bağımsızdırlar ve genel çözüm

$$\mathbf{y= a_0y_1(x)+a_1y_2(x)}$$

şeklindedir.

Ödev:

- **$y''-xy=0$, $-\infty<x<\infty$; eğri denkleminin (x-1) kuvvet serisi şeklinde seri çözümünü bulunuz.**

- $(1-x)y''+y=0$ diferansiyel denkleminin $x_0=0$ noktası civarında seri çözümünü bulunuz.(not: ilk 5 terime kadar açmanız yeterli)

ADİ NOKTA CİVARINDA SERİ .ÇÖZÜMÜ

Bir önceki bölümde P(x),Q(x) ve R(x) polinom olmak üzere

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0 \qquad \textbf{(1)}$$

şeklindeki diferansiyel denklemin x_0 noktası civarında çözümlerini aradık ve (1) denkleminin

$$\mathbf{y=\phi(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+........} \quad =\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad \textbf{(2)}$$

şeklinde çözümünün arandığını $|x-x_0|<\rho$, $\rho>0$ aralığında yakınsak olduğunu kabul ettik. a_n katsayıları (2) denklemi ve bu denklemin y' ve y'' türevleri alınıp bunlar (1) nolu denklemde yerlerine konularak bulunduğu anlatmıştık

(1) denkleminin P(x), Q(x) ve R(x) fonksiyonları analitik ise yukarıda verilen tanımlar ve kavramlar genişletilmek zorundadır

Tanım:

Eğer $p(x)=Q(x)/P(x)$, $q(x)=R(x)/P(x)$ fonksiyonları x_0 noktasında analitik ise (analitik= x_0 noktası civarında türevi varsa)

Bunlara karşılık gelen Taylor serileri:

$p(x)=p_0+p_1(x-x_0)+..................+p_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n$

$q(x)=q_0+q_1(x-x_0)+..................+ q_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n$

ise x_0 noktasına

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{Q(x)}{P(x)}\frac{dy}{dx}+\frac{R(x)}{P(x)}y=0 \Rightarrow y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

denkleminin ***'adi noktası'*** denir. Aksi takdirde bu noktaya ***'singular(tekil) nokta'*** denir.

Teorem:

$x=x_0$ noktası; $p(x)=Q(x)/P(x)$, $q(x)=R(x)/P(x)$ fonksiyonları x_0 noktasında analitik olmak üzere

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{Q(x)}{P(x)}\frac{dy}{dx}+\frac{R(x)}{P(x)}y=0 \Rightarrow y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

denkleminin bir adi noktası ise buradan denklemin genel çözümü

$$y_{genel}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

olur. Burada a_0 ve a_1 keyfidir, y_1 ve y_2 , x_0 da analitik lineer bağımsız seri çözümleridir. y_1 ve y_2 seri çözümlerinin yakınsaklık yarıçapları en azından p ve q ya karşılık gelen serilerin yakınsaklık yarıçapları kadar geniştir. $|x-x_0|=\rho$ ise seri yakınsakta ıraksak ta olabilir.

Örnek 1:

$x=x_0$ noktası civarında $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ α(sabit) legendre denkleminin yakınsaklık yarıçapları için bir alt sınır bulunuz.
çözüm:

P(x)= (1-x^2) , Q(x)= -2x , R(x)= $\alpha(\alpha+1)$

P(x)=0 $\Rightarrow$ **x=** ± 1

Böylece legendre denkleminin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **şeklindeki bir seri çözümü en az** $|x| < 1$ **için yakınsaktır.**

Örnek2:

x=0 noktası ve x=-1/2 noktası civarında
(1+x^2)y''+2xy'+4x^2y=0 denkleminin yakınsaklık yarıçapları için bir alt sınır bulunuz.

çözüm:

P(x)= (1+x^2) , Q(x)= -2x , R(x)= 4x^2

P(x)=0, $\Rightarrow$ **x=** $\pm$**i (kompleks)**

Kompleks düzlemde x=0 olan $\pm$i noktalara uzaklık z=0$\pm$i
$|z| = \sqrt{0^2+1^2} = 1 = \rho$ **dir** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **serileri en az** $|x| < 1$ **için yakınsaktır**

Kompleks düzlemde x=-1/2 olan $\pm$i noktalara uzaklık z= -1/2 $\pm$i ile
$|z| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \rho$ **dir.** $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ **serileri en az** $|x - x_0| < \rho$ $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$
aralığında yakınsaktır.

REGÜLER, SİNGÜLER NOKTALAR

Bu bölümde P(x), Q(x) ve R(x) birer polinom olmak üzere

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

denkleminin x_0 singüler noktası civarında çözümünü araştıracağız.

Bunun için

$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$ **sonlu** , $\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$ **sonlu**

ise bu koşulları sağlayan x_0 noktasına $P(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\dfrac{dy}{dx}+R(x)y=0$ denkleminin ***'Düzgün Tekil nokta*(*Regüler-Singüler Noktası)'*** denir.

Herhangi bir singüler noktası regüler-singüler nokta değilse bu noktaya $P(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\dfrac{dy}{dx}+R(x)y=0$ denkleminin ***'irregüler-singüler noktası'*** denir.

bu ifadeler $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$**=p(x)** singülerliğin $(x-x_0)^{-1}$ den ve $\dfrac{R(x)}{P(x)}$**=q(x)** deki singülerliğin de $(x-x_0)^{-2}$ den kötü olamayacağını belirtir.

Polinomlardan daha genel fonksiyonlar içinse, x_0 noktasının regüler-singüler nokta olması için x_0 noktası singüler olmalı ve $(x-x_0)\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ **ve** $(x-x_0)^2\dfrac{R(x)}{P(x)}$ fonksiyonları x_0 noktasında Taylor serisine açılabilmelidir

(Yani $(x-x_0)\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ **ve** $(x-x_0)^2\dfrac{R(x)}{P(x)}$ fonksiyonları x_0 noktasında analitik olmalıdır).

Örnek

2x**(x-2)²y''+3xy'+(x-2)y=0 denkleminin singüler noktalarını bulunuz ve bu noktaları regüler ve irregüler olarak sınıflandırınız.**

Çözüm:

$P(x)=2x(x-2)^2$ $\quad$ $P(x)=0$ $\quad$ $2x(x-2)^2=0$ $\quad$ $x=0,\ x=2$ (singüler noktalar)

p(x)=$\dfrac{Q(x)}{P(x)}$**=3/** 2**(x-2)²** $\quad$ **q(x)=**$\dfrac{R(x)}{P(x)}$**=(x-2)/** 2x**(x-2)²**

$x=x_0=0$ noktası için:

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}x\frac{3}{2(x-2)^2}=0$$ **sonlu**

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}x^2\frac{x-2}{2x(x-2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x(x-2)}=0$$ **sonlu**

limitler sonlu olduğundan x=0 noktası regüler-singüler noktadır

x= x_0 =2 noktası için:

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 2}(x-2)\frac{3}{2(x-2)^2}=\infty$$

x=2 noktası irregüler-singüler noktadır.

Örnek 2:

$(x-\pi/2)^2y''+(\cos x)y'+(\sin x)y=0$ denkleminin singüler noktalarını bulunuz ve bu noktaları regüler ve irregüler olarak sınıflandırınız.

Çözüm:

$P(x)=(x-\pi/2)^2$ P(x)=0 ile $(x-\pi/2)^2=0$ ve x= $\pi/2$ (singüler nokta) Q(x)=cosx, R(x)=sinx analitik fonksiyonlar olduklarından

$$(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}=(x-\frac{\pi}{2})\frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}.=\frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})}$$

$$(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}=(x-\frac{\pi}{2})^2\frac{\sin x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}=\sin x$$

fonksiyonları gözönüne alınır. Buradan $\dfrac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})}$ **için**

y=cosx in $x_0=\pi/2$ civarında taylor serisi

cosx=y(x₀)+ $\frac{x-x_0}{1!}y'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}y''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}y'''(x_0)$ **ile**

cosx= $\cos\frac{\pi}{2}+\frac{x-\frac{\pi}{2}}{1!}(-\sin\frac{\pi}{2})+\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!}(-\cos\frac{\pi}{2})+\frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!}(\sin\frac{\pi}{2})$

veya

cosx= $-(x-\frac{\pi}{2})+\frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!}-\frac{(x-\frac{\pi}{2})^5}{5!}$
olduğundan

$\frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})}=-1+\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{3!}-\frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{5!}$ **bulunur bu seri her x için yakınsar**

sinx in $x_0=\pi/2$ civarında taylor serisi

sinx= $1--\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!}+\frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{4!}$ **taylor serisine açıldığından**

x= π/2 noktası regüler-singüler noktadır.

Ödev

1) $x^2(1-x^2)y''+2xy'+4y=0$ denkleminin singüler noktalarını bulunuz ve bu noktaları regüler ve irregüler olarak sınıflandırınız.

1.

2) $x^2y''-3\text{Sin}xy'+(1+x)^2y=0$ denkleminin singüler noktalarını bulunuz ve bu noktaları regüler ve irregüler olarak sınıflandırınız.(Taylor serisi)

EULER DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Regüler ve singüler noktaya sahip en basit diferansiyel denklem olarak

$$L(y)=x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0 \qquad (1)$$

euler diferansiyel denklemini verebiliriz(α**=sabit,** β**=sabit (reel sayı))**

(1)denklemi için x=0 noktasının regüler ve singüler olduğu kolayca görülür($\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}x\frac{\alpha x}{x^2}=\alpha,\ \lim_{x\to 0}x^2\frac{R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}x^2\frac{\beta}{x^2}=\beta)$ **sonlu).**

Çözüm için

$$y=x^r \quad \text{seçilir}$$

$y'=rx^{r-1}$
$y''=r(r-1)\,x^{r-2}$

(1) de yerlerine konulursa

$r(r-1)\,x^{r-2}x^2++\alpha x\, rx^{r-1}+\beta\, x^r=0$

$r(r-1)\,x^r+\alpha\, rx^r+\beta\, x^r=0$

$x^r(r^2-r+\alpha\, r+\beta)=0 \qquad r^2+r(\alpha-1)+\beta=0$ **2.derece denklem**

genel çözümler:

- **Kökler reel ve birbirinden farklı ise (r1,r2)**

$$y=c_1x^{r1}+c_2x^{r2}$$

- **Kökler reel ve birbirine eşit ise(r1=r2=r)**

$$y=(c_1+c_2(\ln x))x^r$$

- **Kökler kompleks ve eşlenik ise(r1,r2=α±iβ)**

$$y=x^\alpha[c_1\cos(\beta\ln x)+c_2\sin(\beta\ln x)]$$

dir.

Örnekler:

1) $x^4y''+x^3y'=4$ **euler diferansiyel denklemini çözünüz.**

çözüm:

$y=x^r$ **seçilir**
$y'=rx^{r-1}$
$y''=r(r-1)\,x^{r-2}$

$r(r-1)x^{r+2}+r\,x^{r+2}=4$

$x^{r+2}(r^2\cancel{-r}\cancel{+r})=4 \qquad r^2=4 \quad r_1=2\,,\ r_2=-2$

$$y=c_1x^2+c_2x^{-2}$$

2) $2x^2y''+3xy'-y=0$ **euler diferansiyel denklemini çözünüz**

$y=x^r$ **seçilir**

$y^{'}=rx^{r-1}$ $\qquad$ $2r(r-1)x^r+3r\,x^r-x^r=0$

$y^{''}=r(r-1)\,x^{r-2}$

$x^r[2r(r-1)+3r-1]=0$ $\qquad$ $2r^2+r-1=0$

$r_1=1/2$, $r_2=-1$ iki farklı reel kök

$$y=c_1x^{1/2}+c_2x^{-1}$$

3) $x^2y^{''}+xy^{'}+2y=0$ euler diferansiyel denklemini çözünüz

$y=x^r$ **seçilir**

$y^{'}=rx^{r-1}$

$y^{''}=r(r-1)\,x^{r-2}$

$r(r-1)\,x^r+rx^r+2x^r=0$ $\qquad$ $(r^2-\cancel{r}+\cancel{r}+2)\,x^r=0$

$r^2+2=0$ $\qquad$ $b^2-4ac=-8<0$ $\qquad$ $r_1,r_2=\pm\sqrt{2}i$ **kompleks**

$y=\alpha\pm i\beta$ $\qquad$ $y=0\pm\sqrt{2}i$ **genel çözüm**

$y=x^{\alpha}[c_1\cos(\beta\ln x)+c_2\sin(\beta\ln x)]$

$$y=c_1\cos(\sqrt{2}\ln x)+c_2\sin(\sqrt{2}\ln x)]$$

4) $2x^2y^{''}+xy^{'}-3y=0$ $y(1)=1, y^{'}(1)=4$ başlangıç koşulları ile diferansiyel denklemi çözünüz

5) $x^2y^{''}-3xy^{'}+4y=0$ $y(-1)=2$, $y^{'}(-1)=3$ başlangıç koşulları ile diferansiyel denklemi çözünüz

6)$x^2y^{''}+3xy^{'}+5y=0$, $y(1)=1$, $y^{'}(1)=1$ başlangıç koşulları ile diferansiyel denklemi çözünüz

BİR REGÜLER-SİNGÜLER NOKTA CİVARINDAKİ SERİ ÇÖZÜMLERİ

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0 \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

denkleminin $x_0=0$ singüler noktası civarında çözümünü araştıracağız. Bunun için

$\lim_{x\to 0}(x)\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ **sonlu** , $\lim_{x\to 0}(x)^2\dfrac{R(x)}{P(x)}$ **sonlu**

ise x=0 *(1)* denkleminin regüler-singüler noktasıdır.

Bu nedenle bu fonksiyonlar$|x|<\rho,\rho<0$ civarında yakınsak kuvvet serilerine açılabilir.

$\dfrac{Q(x)}{P(x)}$**=p(x)** ve $\dfrac{R(x)}{P(x)}$**=q(x) ile**

$$xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n x^n, \qquad x^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n x^n \qquad (2)$$

(1) denkleminde x **p(x) ve x^2q(x) in görünebilmesi için** *(1)* denklemini P(x) e böler x^2 ile çarparsak:

$x^2y''+x(xp(x))y'+x^2q(x)y=0$ (3)
$x^2y''+x(p_0+p_1x+...........+p_nx^n)y'+(q_0+q_1x+q_2x^2+......+q_nx^n)y=0$ (4)
olur.Eğer

$$\mathbf{p_0}=\lim_{x\to 0}(x)\frac{Q(x)}{P(x)} \qquad \mathbf{q_0}=\lim_{x\to 0}(x)^2\frac{R(x)}{P(x)} \qquad \textbf{(5)}$$

katsayıları hariç tüm p_n ve q_n ler sıfır ise (4) denklemi

$$\mathbf{x^2y''+p_0xy'+q_0y=0} \qquad \textbf{(6)}$$

euler dif. denklem şekline dönüşür. Genel durumda p_n ve q_n $n\geq 1$ sıfırdan farklıdır. Böylece (4) denkleminin çözümü euler denkleminin benzeridir.

$a_0\neq 0$ olmak üzere

$$\mathbf{y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+.........+a_nx^n)= x^r}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \qquad \mathbf{(7)}$$

şeklinde çözümü olduğunu varsayıyoruz**.** Dolayısıyla (1) denkleminin çözümü için:

- (1) denklemi hangi r değerleri için (7) formunda bir çözüme sahiptir?
- a_n katsayıları için hangi regürans bağıntı vardır?
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serilerinin yakınsaklık yarıçapları nelerdir ? sorularına yanıt verilmelidir.

Bu şekilde çözüm aramanın genel yolu Frobenius tarafından verilmiştir. Frobenius metodunu bir örnek üzerinde incelersek:

Örnek:

$$\mathbf{2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0} \qquad (8)$$

denklemini çözünüz.

Çözüm:

P(x)=0 ile x=0 noktası bu denklemin singüler noktasıdır.

$\mathbf{p_0=} \lim_{x\to 0}(x)\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ **=-1/2** $\qquad$ $\mathbf{q_0=}\lim_{x\to 0}(x)^2\dfrac{R(x)}{P(x)}$**=1/2 sonlu**

diğer tüm p ve q katsayıları sıfırdır. (8) denklemine karşılık gelen euler denklemini (6) denkleminden yaralanarak

$$2x^2y'' - xy' + y = 0 \qquad (9)$$

denklemini yazarız. (8) denklemini çözebilmek için (7) formunda yani

$$\mathbf{y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+.........+a_nx^n)=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

şeklinde çözümü olduğunu farz ederek birinci ve ikinci türevlerini alıp (8) nolu denklemde yerlerine koyarsak

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n-1} \qquad (10)$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2} \qquad (11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{2}a_n(r+n)(r+n-1)\, x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} = 0 \qquad (12)$$

(12) denkleminin son terimini $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{r+n}$ şeklinde yazabiliriz. Tüm terimleri ortak toplam altında yazarsak

$$a_0(2r(r-1)-r+1)x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{(2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1)a_n+a_{n-1})x^{r+n}=0} \qquad (13)$$

Eğer (13) her x için sağlanıyorsa (13)denklemindeki her mertebeden x in katsayısı '0' olur. x^r nin katsayısından $a_0 \neq 0$ olduğundan

$$2r(r-1)-r+1=0 \qquad (14)$$

elde edilir. (14) denklemine (8) denkleminin '***indis denklemi'*** denir.
Bu indis denkleminin kökleri $r_1=1$ ve $r_2=1/2$ dir r nin bu değerlerine x=0 regüler-singüler noktasının singülerliliğinin kuvvetleri denir.

(13) denkleminde x^{r+n} katsayısını 0 a eşitlersek

$$(2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1)a_n+a_{n-1}=0 \qquad (15)$$

ile regürans bağıntısı(katsayılar arasındaki bağıntı)

$$a_n=- a_{n-1}/(2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1) \qquad (16)$$

elde edilir. a_1 ve a_2 katsayılar kümesinin tümünü elde etmek için indis denkleminin her r_1 ve r_2 kökü için (16) nolu regürans bağıntısını kullanılırız.

$r=r_1=1$ için (16) nolu denklem $n \geq 1$ için

$a_n=- a_{n-1}/(2(1+n)(\cancel{1}+n-\cancel{1})-(\cancel{1}+n)+\cancel{1})$ $\qquad a_n=- a_{n-1}/(2(1+n))n)-n$

$$\mathbf{a_n=- a_{n-1}/(2n+1)n}$$

olur.

n=1 için $\qquad a_1=-a_0/3$

n=2 için $\qquad a_2=- a_1/5*2= a_0/5*2*3 \qquad$ hepsi a_0 a bağlı

n=3 için $\qquad a_3= -a_2/7*3= a_0/7*5*3*2*3$

$a_n = -(1)^n/(2n+1)n!$ **$n \geq 1$**

$a_0 = 1$ alarak a_0 katsayısını çıkarırsak (8) denkleminin çözümü

$$y_1(x) = x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)n!}\right] \tag{18}$$

(18) deki yakınsaklık yarıçapını bulmak için oran testini uygularsak

her x için

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)^{n+1}}{a_n(x)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(2n+3)(n+1)} = 0 \text{ olur.}$$

Buradan her x için seri yakınsar.

$r = r_1 = 1/2$ için (16) nolu denklem $n \geq 1$ için

$a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{n(2n-1)}$ regürans bağıntısı elde edilir. n=1,2,3... verilerek

a_i katsayıları belirlenir.

n=1 için $a_1 = -a_0/1*1$

n=2 için $a_2 = -a_1/2*3 = a_0/(1*2)(1*3)$ hepsi a_0 a bağlı

n=3 için $a_3 = -a_2/3*5 = -a_0/(1*2*3)(1*3*5)$

$a_n = -(1)^n/(2n-1)n!$ **$n \geq 1$** **(19)**

$a_0 = 1$ alarak a_0 katsayısını çıkarırsak (8) denkleminin çözümü

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n-1)n!}\right] \tag{20}$$

(20) deki yakınsaklık yarıçapını bulmak için oran testini uygularsak

her x için

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)^{n+1}}{a_n(x)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(2n+1)(n+1)} = 0 \text{ olur.}$$

Buradan her x için seri yakınsar. Böylece (8) denkleminin genel çözümü

$$y_{genel}=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

olur.

BİR REGÜLER-SİNGÜLER NOKTA CİVARINDAKİ SERİ ÇÖZÜMLERİ (2.kısım)

Bu bölümde $L(y)=x^2y''+x(xp(x))y'+(x^2q(x))y=0$ (1) denkleminin genel çözümünü araştıracağız.
(1) denklemindeki

$$xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n, \qquad x^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n \tag{2}$$

$|x|<\rho$ aralığında yakınsak serilerdir.

$\frac{Q(x)}{P(x)}$**=p(x)** ve $\frac{R(x)}{P(x)}$**=q(x)**

x=0 noktası regüler-singüler noktadır, yani

p_0= $\lim_{x\to 0}(x)\frac{Q(x)}{P(x)}$ **q_0=**$\lim_{x\to 0}(x)^2\frac{R(x)}{P(x)}$ **sonlu**

katsayıları hariç tüm p_n ve q_n ler sıfır ise euler denklemi

$$x^2y''+p_0xy'+q_0y=0 \tag{3}$$

şeklindedir. ve (1)denkleminin çözümü $a_0\neq 0$ olmak üzere

$$y=(\phi)(r,x)=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+.........+a_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{r+n} \tag{4}$$

şeklinde aranır, birinci ve ikinci türevleri alınarak (1) denkleminde yerlerine konur,

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_nx^{r+n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2} \qquad (5)$$

$a_0r(r-1)x^r+a_1(r+1)r\,x^{r+1}+......(r+n)(r+n-1)a_nx^{r+n}+(p_0+p_1x+p_2x^2+....+p_nx^n)[$ $a_0rx^r+a_1(r+1)\,x^{r+1}+..+(r+n)a_nx^{r+n}+...]+(q_0+q_1x+q_2x^2+....+q_nx^n)[$ $a_0x^r+a_1x^{r+1}+.....+a_nx^{n+r}+...]=0$ bulunur. sonsuz terimleri çarpıp aynı mertebeden terimleri gruplarsak

$$L(\phi)(r,x)=a_0[F(r)]x^r+\sum_{k=0}^{n=1} a_k\left[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\right]x^{r+n}=0 \qquad (6)$$

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0 \qquad (7)$$

dir.

(6)denkleminin sağlanması için x in tüm kuvvetlerinin katsayıları sıfır olmalıdır **$a_0\neq 0$ olduğundan x^r i içeren** $F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=0$ olur Bu denkleme indis denklemi denir. bu indis denkleminin kökleri $r_1 > r_2$, r_1 ve r_2 reel kökleri olsun Bu r_1 ve r_2 ye singülerliğin kuvveti de denir. (6)denkleminde x^{r+n} nin katsayısı 0 a eşitlersek

$$\sum_{k=0}^{n=1} a_k\left[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\right]=0 \qquad (8)$$

$n\geq 0$ için (1) denkleminin (4) formunda

$$\mathbf{y(x)\phi)=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+..........+a_nx^n)=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

ile

$$\mathbf{y_1(x)=|x|^{r1}[1+}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\,\mathbf{]} \qquad x>0 \qquad (9)$$

bir çözümü bulunur.

Burada $a_n(r_1)$ ler (8) rekürans denkleminde $a_0=1$, $r=r_1$ alınarak bulunur.

- Eğer $r_2\neq r_1$ ise,

$$y_2(x)=|x|^{r2}\mathbf{[1+}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\,\mathbf{]} \quad x>0 \qquad (10)$$

bulunur

- Kökler eşit ise $r_2=r_1=r$ ise,(6) denklemi

$$L(\phi)(r_1,x)=a_0[F(r)]x^r=a_0(r-r1)^2x^r \tag{11}$$

formuna indirgenir. F(r) nin katlı kökü olduğundan $r=r_1$ alırsak (11) denklemi $L(\phi)(r_1,x)=0$ bulunur. Dolayısıyla (1) denkleminin bir çözümü

$$\mathbf{y_1(x)=x^{r1}[1+}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\,] \qquad x>0$$

şeklinde bulunur. (11) denkleminden

$$L[\partial\phi/\partial r](r_1,x) = a_0\, \partial/\partial r\, [\,(r-r_1)^2x^r\,]= a_0[(r-r_1)^2x^r\ln x+2(r-r_1)\,x^r] \tag{12}$$

bulunur. bundan yararlanarak (1) denkleminin ikinci çözümü

$$y_2(x)= \partial/\partial r(x^r[\mathbf{a_0}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\,])_{\mathbf{r=r1}}= x^{r1}\ln x[\mathbf{a_0}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\,]+\mathbf{x^{r1}}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n =$$

$$y_2(x)= y_1(x)\ln x+ \mathbf{x^r{}_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n \tag{13}$$

bulunur. (Burada $a'_n(r_1)=da_n/dr_1$). (13) denklemi daha basit olarak

$$y= y_1(x)\ln x+ \mathbf{x^{r1}}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \tag{14}$$

formunda da bulunabilir.

- Kökler farkı bir tamsayı ise ($r_1-r_2=N$)

bu durumda

$$c_n(r2)= \partial/\partial r[(r-r_2)a_n(r)\,] \tag{15}$$

katsayıları $a_0=1$ ve a_n de (8) nolu rekürans denkleminden elde edilerek bulunur. ayrıca a katsayısı

$$\mathbf{a=}\lim_{r\to r2}(r-r_2)a_n(r) \tag{16}$$

dır. $r_1-r_2=N$ ise ikinci çözüm:

$y_2(x)=ay_1(x)\ln x+|x|^{r2}[1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n]$ **(17)**

şeklinde bulunur.

Teorem:

$$x^2y''+x[xp(x)]y'+[x^2q(x)]y=0 \quad \textbf{(1)}$$

diferansiyel denklemi göz önüne alınsın x=0 noktası (1) denkleminin regüler-singüler noktasıdır. x=0 noktasında xp(x) ve x^2q(x) analitiktir ve ayrıca |x|<ρ aralığında

$$xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \qquad (2)$$

serileri yakınsaktır.

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0$$

- indis denkleminin kökleri r_1 ve r_2 olsun ve $r_1 \geq r_2$ şartı sağlansın bu durumda -ρ**<x<0 ve 0<x<**ρ **aralıklarının birinde**

$$\mathbf{y_1(x)}=x^{r1}[1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n]$$

şeklinde bir çözüm bulunur. $a_n(r_1)$ ler (8)denkleminde a_0=1, r=r_1 alınarak bulunur.

- Eğer $r_2-r_1 \neq 0$ ve (+) bir tamsayı değilse, -ρ**<x<0 ve 0<x<**ρ **aralıklarının birinde**

$$\mathbf{y_2(x)}=x^{r2}[1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n]$$

ikinci bir lineer bağımsız çözüm bulunur. $a_n(r_2)$ ler (8)denkleminde a_0=1, r=r_2 alınarak bulunur.

- $r_1=r_2$ ise ikinci çözüm

$$y_2(x)= y_1(x)\ln x+ |\mathbf{x}|^{\mathbf{r1}}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n$$

- r_1-r_2 =N (kökler farkı pozitif tamsayı ise), ikinci çözüm

$$y_2(x)=ay_1(x)\ln x+|x|^{r2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n\right]$$

şeklindedir. Buradaki $a_n(r_1)$, $b_n(r_1)$, $c_n(r_2)$ katsayıları ve 'a' sabiti (1) denkleminde y yerine seri çözümleri konularak elde edilen formdan yararlanılarak bulunur. Basitlik için yukarıdaki denklemde a=0 seçilirse logaritmik değer kalkar,bu durumda son iki kısımdaki (r_1=r_2 , ve r_1-r_2=N kısımlarında elde edilen)serilerin her ikisi de $|x|<\rho$ aralığında yakınsar.

ÖDEV:

$2x(1+x)y''+(3+x)y'-xy=0$ regüler singüler noktalar civarında çözümlerin özelliklerini araştırınız.

BESSEL DENKLEMİ

$$x^2y''+xy'+(x^2+\nu^2)y=0 \quad (\nu(\text{sabit})) \qquad (1)$$

x=0 noktası regüler-singüler noktadır. Basitlik için x>0 durumu incelenmektedir. Bu bölümde Bessel denklemini

1. Sıfırıncı mertebeden Bessel denklemi
2. 1/2. mertebeden Bessel denklemi
3. 1. mertebeden Bessel denklemi

olmak üzere 3 özel durumda ele alacağız. Bu hallerden 1/2. mertebeden Bessel denklemi açık olarak incelenecektir.

1/2. Mertebeden Bessel Denklemi

Burada ele alınacak örnek çözüm kökler farkının tamsayı ve ikinci çözümün logaritmik terim içermemesine aittir. (ν=1/2 alırsak)

$$L(y)=x^2y''+xy'+(x^2 - 1/4\nu^2)y=0 \qquad (b1)$$

olur.$y=\phi(r,x)=a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n}$ serisini (b1) de yerine koyarsak

$$L(\phi)(r,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(r+n)(r+n-1)+(r+n)-1/4\right]a_n x^{r+n} = (r^2-1/4)a_0 x^r + \left[(r+1)^2-1/4\right]a_1 x^{r+1} +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}(\left[(r+n)^2-1/4\right]a_n + a_{n-2})x^{r+n} = 0 \qquad \text{(b2)}$$

İndis denkleminin kökleri (r1=1/2, ve r2=-1/2) dır. Regürans bağıntısı

$((r+n)^2-1/4)a_n + a_{n-2})x^{r+n} = 0$ n≥2 ile

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(r+n)^2-1/4}. \qquad \text{(b3)}$$

olur.

r1=1/2 için (b2)denklemindeki x^{r+1} in katsayısından $a_1=0$ bulunur. Böylece (b3) denkleminden $a_3=a_5=..........=a_{(2n+1)}=0$ olur

r1=1/2 için $a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n+1)}$ veya $a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{2n(2n+1)}$ a n=2,4,6 için

$a_2=-a_0/3!$,$a_4=a_0/5!$, **$a_{2n}=(-1)^n a_0/(2n+1)!$ Veya**

Böylece $a_0=1$ alırsak

$$\mathbf{y_1(x)=x^{1/2}[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}]= x^{-1/2}[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}]} \qquad \textbf{(b4)}$$

(b4) deki kuvvet serisi Sinx fonksiyonuna karşılık gelir. Böylece ½ Bessel fonksiyonunun bir çözümü

$y_1(x)=x^{-1/2}$Sinx olur. Buradan ½ Bessel denklemi

$J_{1/2}=(2/Pi)^{1/2}y_1$, $J_{1/2}(x)=$ 2/x*Pi)$^{1/}$2Sinx x>0 (b5)

şeklinde bulunur.

$r_2=-1/2$ için N=r1-r2=1 olduğundan a_i katsayılarının bulunmasına dikkat edilmelidir. (b2) denkleminden görüleceği gibi x^r ve $x^{r+!}$ Katsayıları 0 olur. Bu nedenle a_0 ve a_1 keyfi seçilebilir.

Regürans denkleminden çift indisli katsayılar a_0 a, tek indisli katsayılar, a_1 e bağlı olarak elde edilir (Bu nedenle ikinci çözümde logaritmik terim bulunmaz) Burada

r=-1/2 için

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2n!}, a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}$$ böylece

$$y_2(x)=x^{-1/2}\left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

$y_2(x)= a_0 \, Cosx/x^{1/2}+a_1 \, Sinx/x^{1/2}$,x>0 (b6)

Bessel denkleminin 2.çözümü

$a_0=(2/Pi)^{1/2}$ $a_1=0$

alınarak elde edilir. bunu J(-1/2) ile gösteririz. Buradan

$J(-1/2)\,(x)=(2/(Pi*x))^{1/2}cosx$ x>0

Böylece (b1) denkleminin genel çözümü

$y_{genel}=c_1 \, J_{1/2}\,(x)+c_2 \, J_{-1/2}\,(x)$

şeklinde bulunur.