TC. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ YAYINI NO: 1286
AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ YAYINI NO: 708

GENEL MATEMATİK

Yazarlar
Prof.Dr. Yalçın KÜÇÜK (Ünite 1, 2, 3, 4)
Doç.Dr. Mehmet ÜREYEN (Ünite 5, 6, 7)
Öğr.Gör.Dr. Nevin ORHUN (Ünite 8)
Prof.Dr. Musa ŞENEL (Ünite 9, 10, 14)
Prof.Dr. Orhan ÖZER (Ünite 11, 12)
Doç.Dr. Hüseyin AZCAN (Ünite 13)

Editör
Prof.Dr. Orhan ÖZER

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

UZAKTAN ÖĞRETİM TASARIM BİRİMİ

Genel Koordinatör
Prof.Dr. Levend Kılıç

Genel Koordinatör Yardımcısı
Yard.Doç.Dr. Müjgan Bozkaya

Öğretim Tasarımcısı
Yard.Doç.Dr. Melih Zeytinoğlu

Grafik Tasarım Yönetmenleri
Prof. T. Fikret Uçar
Öğr.Gör. Cemalettin Yıldız

Televizyon Programları Yöneticisi
Doç.Dr. Feridun Akyürek

Dil ve Yazım Danışmanları
Yard.Doç.Dr. Hülya Pilancı
Öğr.Gör. Şennur Arslan
Okt. Aydın Fındıkoğlu

Ölçme Değerlendirme Sorumluları
Öğr.Gör. Ayşegül Tokbudak
Öğr.Gör. Meryem Akar

Kitap Koordinasyon Birimi
Yard.Doç.Dr. Feyyaz Bodur
Uzm. Nermin Özgür

Kapak Düzeni
Prof. T. Fikret Uçar

Dizgi
Açıköğretim Fakültesi Dizgi Ekibi

Genel Matematik

ISBN
975 - 06 - 0031 - 2

4. Baskı

Bu kitap ANADOLU ÜNİVERSİTESİ Web-Ofset Tesislerinde 150.000 adet basılmıştır.
ESKİŞEHİR, Haziran 2004

İçindekiler

Önsöz

Bu kitap, Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi'nin İktisat ve İşletme Fakültelerinin çeşitli bölümlerinde okutulan Genel Matematik dersinin kapsamındaki konuları içerecek şekilde hazırlanmıştır. Esas olarak da, günümüz matematiğinin uygulamaya yönelik kimi temel konularının ve kavramlarının tanıtılması amaçlanmıştır.

On dört üniteden oluşan kitabın, ilk dört ünitesinde kümeler, sayılar, eşitlik, eşitsizlik, fonksiyon, fonksiyon grafiği gibi kavramlar tanıtılmıştır. Beşinci ve altıncı ünitelerde limit, süreklilik türev kavramları anlatılmıştır. Bu kavramların tanıtılmasında basit örneklerden hareket edilerek kesin tanımlara ulaşılmaya çalışılmıştır. Yedinci ünite türev uygulamalarına ilişkindir. İlk türev testi ve ikinci türev testi ile maksimum minimum problemlerinin çözümüne ilişkin örnekler verilmiştir. Sekizinci ünitede üstel ve logaritmik fonksiyonlar ele alınmıştır; onların grafiklerine, türevlerine ve ekonomik problemlere uygulanışına ilişkin örnekler verilmiştir. Dokuzuncu ünitede, türevin ters işlemi olarak belirsiz integral tanımlanmış ve değişken değiştirme, basit kesirlere ayırma, kısmi integrasyon gibi belirsiz integral alma yöntemleri üzerinde durulmuştur. Onuncu ünitede, belirli integral kavramı, alan hesaplamaları, üretici rantı, tüketici rantının hesaplanmasına ilişkin örnekler verilmiştir. Onbirinci ünitede doğrusal denklem, doğrusal denklem sistemleri, sistemin çözümünün varlığı, tekliği veya çokluğu, çözümsüzlük durumları incelenmiştir. Doğrusal arz ve talep fonksiyonlarının oluşturduğu sistemin çözümü, denge fiyatı, denge noktası tartışılmıştır. On ikinci ve on üçüncü ünitelerde matrisler ve determinantlar konusu üzerinde durulmuştur. Matrislerin kullanılışı, uygulamadaki yeri, matris işlemleri, ters matrisin bulunması, determinantlar, determinant hesabı, doğrusal denklem sistemlerinin matris yöntemiyle çözümlerinin araştırılması konuları bu ünitelerde anlatılmıştır. Son ünitede doğrusal programlama yönteminin ne olduğu açıklanmış ve grafik yöntemle çözümün aranması örneklerle incelenmiştir.

Konuların işlenişinde yazarlar, kavramları tanımlamada teorik anlatımdan kaçınarak daha çok sezgiye dayalı yaklaşımlar yoluyla ve örneklerle kavramı tanıtmaya çalışmışlardır. Her ünitede konulara ilişkin örneklere yer verilmiştir. Verilen örnekleri iki tür olarak ifade edebiliriz. Birinci türde olanlar, tanıtılmaya çalışılan matematiksel kavramı açıklayacak türden cebirsel ifadeler, simgeler veya özellikler olabilir. Örneğin, matris toplamının değişme özelliğinin doğrulanmasına ilişkin bir örnek olarak, açık biçimde ifade edilen toplanabilir iki matrisin değişme özelliğinin doğrulanması... gibi. İkinci türden olanlar ise o kavramın pratikte uygulanışına ilişkin olan örneklerdir. Söz gelişi, üstel bir fonksiyona örnek için belli bir faiz oranıyla bankaya yatırılan bir paranın bir süre sonraki tutarının zamanın üstel fonksiyonu ile ifade edilmesi... gibi.

Her bir ünitede öğrencilerin düşünüp, tartışıp çözüm aramasına yönelik üç tür alıştırma grubu bulunmaktadır. Bu gruplardan birincisi sıra sizde adı altında toplanan alıştırmalardır. Burada amaçlanan ilgili ünitedeki kavramları pekiştirmek, sıcağı sıcağına öğrencinin çözüm yapabilmesine olanak sağlamaktır. Bu alıştırmaların birçoğu konu içindeki çözümlü örneklerin benzerleridir. Bir kısmı da konu içindeki kavramları bütünleyici nitelikte, örnek oluşturabilecek alıştırmalardır. Bu alıştırmaların çözümleri kağıt-kalem kullanılarak yapılmalıdır. İkinci grup alıştırmalarımız, kendimizi sınayalım adı altında sunulmuş, çoktan seçmeli test türü sorulardan oluşmaktadır. Ünitenin bütününden ve önceki üniteleri de kapsayacak şekilde seçilmiş sorulardan oluşan alıştırmaların dikkatle yanıtlanması gerekmektedir. Bu türde soruların kimileri seçeneklerden başlayarak yanıtlanabilir. Kimileri ise sorunun çözümü yapılarak doğru yanıt bulunabilir. Bir soru için hangi yolun daha uygun olduğu sizin sezginize, dolayısıyla deneyiminize kalmış bir durumdur. Çokça test yanıtlarsanız bu size önemli ölçüde beceri kazandıracaktır. Sınavlarınızın da bu tür sorularla yapıldığını unutmayınız. Üçüncü grup alıştırmalarımız, biraz daha düşünelim adı altında yazılan sorulardan oluşmaktadır. Bu tür sorular öğrencinin kendi kendine düşünmesini, yorum yapmasını, araştırmasını sağlayıcı, buna yönlerdirici problemlerden oluşmaktadır. Tüm alıştırmaların yanıtları kitabın sonunda verilmiştir. Lütfen çözüm için çaba harcamadan yanıtlara bakmayınız.

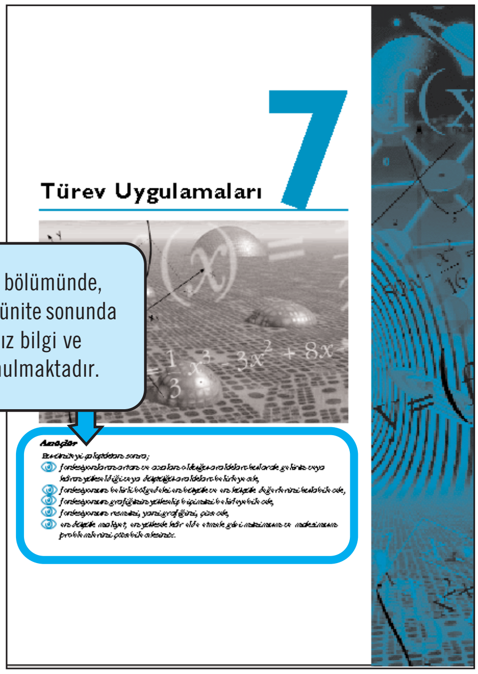
Matematik çalışırken daima kağıt-kalem kullanınız. Kavramınızı, örneğinizi veya sorunuzu açıklayıcı basit grafikler, şemalar çiziniz. Verilenler ile yanıtı aranan soruları birbirinden iyi ayırt ediniz. Bazen verilen soruyu iyi anlamak çözmek kadar önemlidir. Bu uyarıları unutmazsanız başarınızın artacağını göreceksiniz.

Matematiğin kendine özgü bir anlatım biçimi, simgeleri, yazılışı, kısaca bir dili vardır. Uğraşı alanı matematik olmayan birisinin bu dili anlaması, kullanması zor bir olaydır, sabır isteyen bir iştir. Sözü bu kitabın tasarımına, dizgisine getirmek istiyorum. Üniversitemiz Uzaktan Öğretim Tasarım Birimi, Dizgi Birimi, sabırla kitabın en iyi biçimde sunulabilmesi için gerekli çabayı fazlasıyla gösterdiler. Başka bir deyişle, sizlere ulaşan bu kitap yazarların, tasarım ve dizgi elemanlarının yoğun emek ve çabaları sonucunda ortaya çıkmıştır.

Yazımında, tasarımında, çiziminde, elektronik diziminde emeği geçen herkese editör ve yazarlar olarak sonsuz teşekkürlerimizi sunarız.

Haziran 2001 Prof.Dr. Orhan ÖZER

Kendi kendine öğrenme ilkelerine göre hazırlanmış olan bu kitabın işlevlerini öğrenmek için hazırlanan "Kullanım Kılavuzu", konuları anlamanızda ve sınavlara hazırlanmanızda sizlere fayda sağlayacaktır.



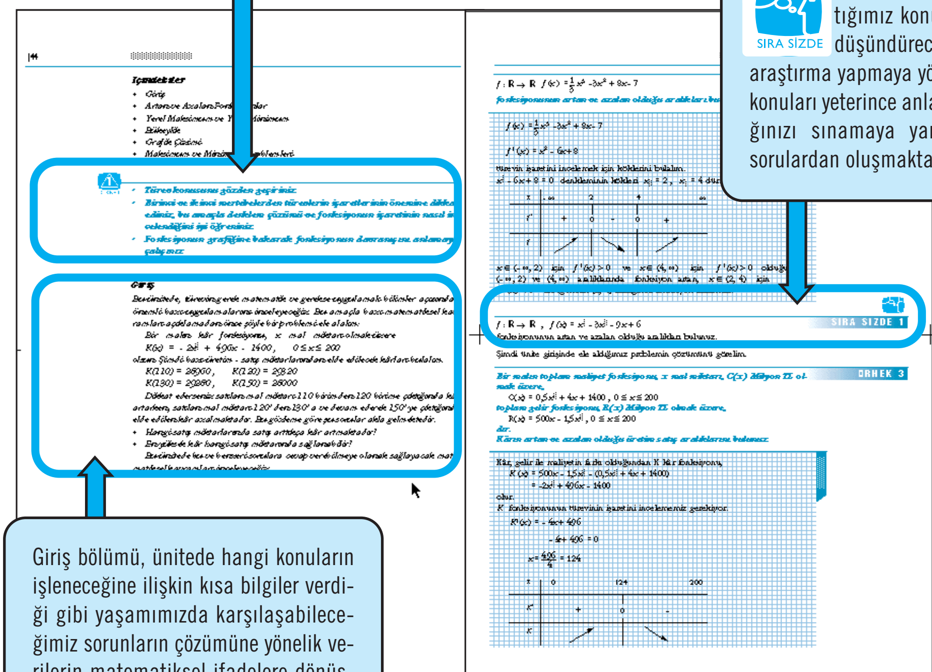
Amaçlarımız bölümünde, okuduğunuz ünite sonunda kazanacağınız bilgi ve beceriler sunulmaktadır.

DİKKAT

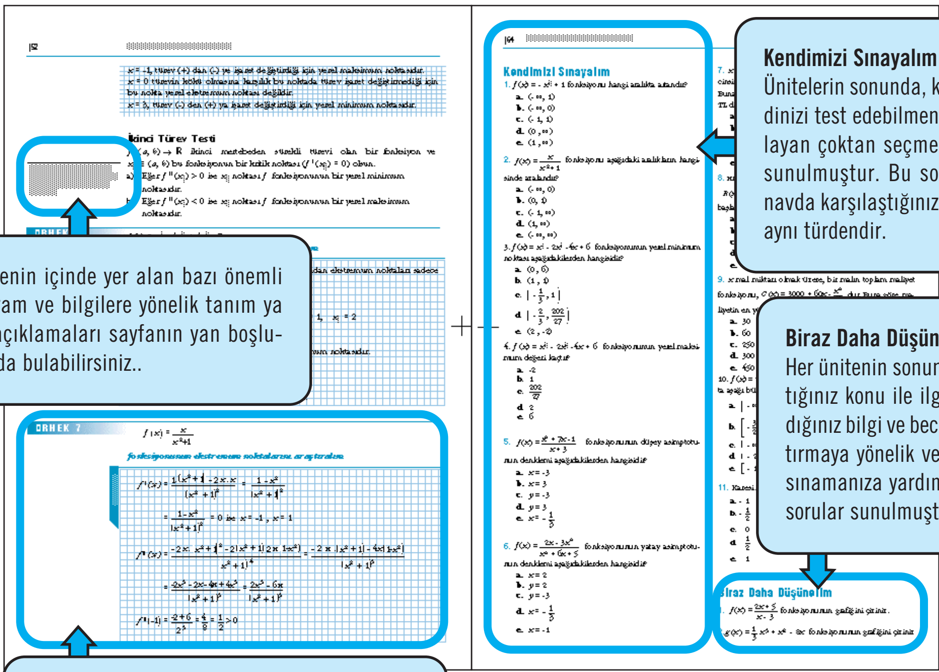
Dikkat bölümünde, üniteyi çalışmaya başlamadan önce bilgi sahibi olmanız gereken hazırlıklarla ilgili uyarı yapılmaktadır. Bu uyarı ayrıca, ünite içinde herhangi bir konuya dikkatinizi çekmek ya da ek bilgi vermek içinde sunulmuştur..

SIRA SİZDE

Sıra sizde bölümleri, çalıştığımız konu ile ilgili, sizi düşündürecek, daha fazla araştırma yapmaya yönlendirecek ve konuları yeterince anlayıp anlamadığınızı sınamaya yardımcı olacak sorulardan oluşmaktadır.



Giriş bölümü, ünitede hangi konuların işleneceğine ilişkin kısa bilgiler verdiği gibi yaşamımızda karşılaşabileceğimiz sorunların çözümüne yönelik verilerin matematiksel ifadelere dönüştürme konusunda açıklamalar yapmak için sunulmuştur..

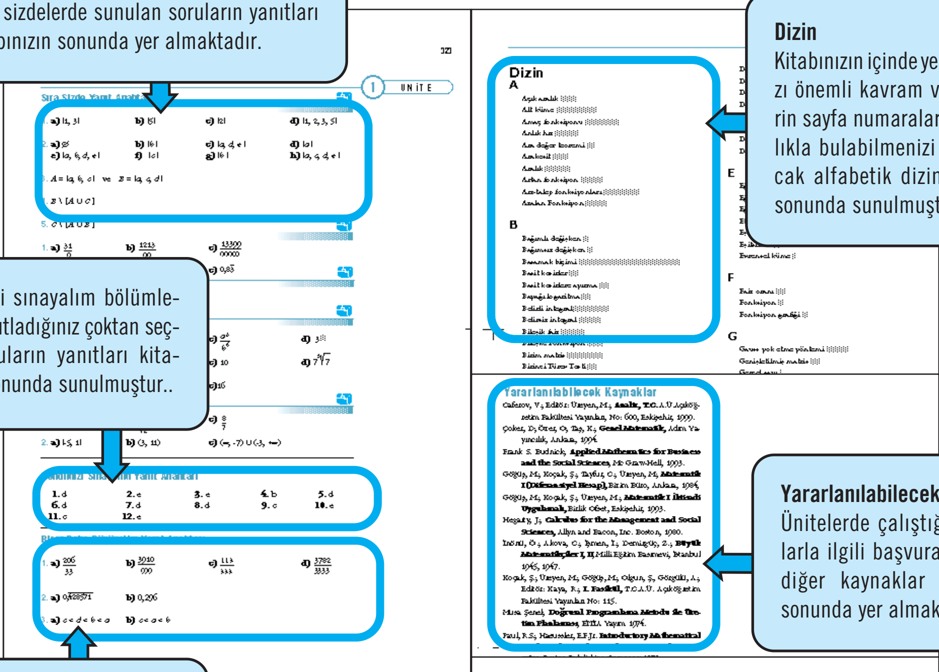


Kendimizi Sınayalım
Ünitelerin sonunda, kendi kendinizi test edebilmenizi amaçlayan çoktan seçmeli sorular sunulmuştur. Bu sorular, sınavda karşılaştığınız sorularla aynı türdendir.

Ünitenin içinde yer alan bazı önemli kavram ve bilgilere yönelik tanım ya da açıklamaları sayfanın yan boşluğunda bulabilirsiniz..

Biraz Daha Düşünelim
Her ünitenin sonunda, çalıştığınız konu ile ilgili kazandığınız bilgi ve becerileri arttırmaya yönelik ve kendinizi sınamanıza yardımcı olacak sorular sunulmuştur.

Örnek
Üniteler içinde çalıştığınız konuyu daha iyi kavramanız, bilgi ve beceri kazanmanızı sağlayacak, çok sayıda matematiksel örnek problem ve çözümleri bulabilirsiniz...



Sıra sizdelerde sunulan soruların yanıtları kitabınızın sonunda yer almaktadır.

Dizin
Kitabınızın içinde yer alan bazı önemli kavram ve bilgilerin sayfa numaralarını kolaylıkla bulabilmenizi sağlayacak alfabetik dizin, kitabın sonunda sunulmuştur..

Kendimizi sınayalım bölümlerinde yanıtladığınız çoktan seçmeli soruların yanıtları kitabınızın sonunda sunulmuştur..

Yararlanılabilecek Kaynaklar
Ünitelerde çalıştığınız konularla ilgili başvurabileceğiniz diğer kaynaklar kitabınızın sonunda yer almaktadır.

Biraz daha düşünelim bölümlerinde sunulan soruların yanıtları kitabınızın sonunda verilmektedir.

Kümeler ve Sayılar

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *küme kavramını tanıyacak, kümeleri algılayıp yazabilecek,*
- *kümeler üzerindeki işlemleri yapabilecek,*
- *küme işlemlerine dayalı problemleri çözebileceksiniz,*
- *sayma sayıları, doğal sayılar, tam sayılar rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümelerinin neler olduğunu hatırlayıp, gerçel sayıların özel alt kümeleri olan aralıkları inceleyeceksiniz,*
- *bir gerçel sayının üssünü kökünü ve bunlar üzerindeki işlemleri öğrenecek,*
- *mutlak değer kavramına dayalı olarak gerçel eksen üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplamayı öğreneceksiniz.*

İçindekiler

- *Kümeler ve Sayılar*
- *Küme Kavramı ve Küme Gösterimleri*
- *Küme İşlemleri*
- *Sayı Kümeleri*
- *Sayı Ekseni*
- *Gerçel Sayılarda Sıralama Özellikleri*
- *Aralıklar*
- *Üslü ve Köklü Çokluklar*
- *Mutlak Değer*

DİKKAT

- ***Üzerinde düşünülerek tanımlamalar iyice anlaşılmalı,***
- ***kavramlar örneklerle pekiştirilmeli,***
- ***alıştırmalar çözülmelidir.***

Giriş

Belli bir A şehrinden, B şehrine giden yol üzerinde C, D ve F gibi üç konaklama yeri vardır. Belli bir gün içinde A şehrinden çıkıp, B şehrine ulaşan otobüs şöförlerine hangi konaklama yerlerinde konakladıkları sorulmuş ve şu yanıtlar alınmıştır.

20 si C de konakladığını,
15 i D de konakladığını,
18 i F de konakladığını ,
6 sı C ve F de konakladığını,
3 ü C ve D de konakladığını,
1 i ise C, D ve F de konakladığını

2 otobüs şöförüde hiçbir yerde konaklamadıklarını ifade etmişlerdir. O gün A şehrinden B şehrine kaç otobüs gelmiştir?

Bu tür problemleri kümeleri kullanarak çözeceğiz. Bu ünitemizin ilk bölümünde, ilk öğretimin başlangıcından bu yana göregeldiğiniz küme kavramına kısaca değineceğiz. Küme gösterimlerini hatırlatıp, küme işlemleri üzerinde duracağız. Ayrıntısına çok inmeyeceğimiz bu inceleme kuşkusuz konuyu hatırlatma amacı taşıyacaktır.

İkinci bölümde, sayı kümeleri, sayıların özellikleri, sayı ekseni ve aralıklar üzerinde duracağız. Ayrıca üslü ve köklü çokluklar konusunu ele alacağız ve mutlak değer kavramını hatırlayacağız.

KÜME KAVRAMI VE KÜME GÖSTERİMLERİ

AMAÇ 1 ***Küme kavramını tanıyacak, kümeleri algılayıp yazabileceksiniz.***

Matematiğin en temel kavramı olan **küme**, iyi tanımlanmış (kesin ayırdedilebilir) nesne veya varlıkların topluluğu olarak tanımlanabilir. Burada iyi tanımlanmış deyimi, kümeyi oluşturan nesne veya varlıkların kesin bir şekilde şüpheye düşmeden saptanabileceğini belirtmektedir.

Örneğin, "Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesine kayıtlı öğrenciler topluluğu" bir küme oluşturur. Çünkü bir öğrencinin A.Ü.A.Ö.Fakültesine kayıtlı olup olmadığı öğrenci kayıt listesine bakılarak kesin olarak belirlenebilir.

Ancak "A.Ü.A.Ö.Fakültesine kayıtlı orta boylu öğrenciler topluluğu" bir küme oluşturmaz. Çünkü orta boylu olmanın ölçüsü açık olarak belirlenmediği sürece, kimin bu topluluğun üyesi, kimin üyesi olmadığı kesin olarak belirlenemez.

Bir küme verilsin. Bu kümeye ait nesne veya varlıklara o kümenin elemanları ya da üyeleri denir. Kümeler genellikle A, B, C, X, Y gibi büyük harflerle, kümenin elemanları ise a, b, c, x, y gibi küçük harflerle gösterilirler. Bir a elemanı A kümesinin elemanı ise $a \in A$ ile gösterilir ve "***a*** **eleman** ***A***" veya "***a, A*** **kümesine aittir**" diye okunur. b, A kümesine ait değilse $b \notin A$ ile gösterilir.

Hiç elemanı olmayan bir kümeye boş küme diyeceğiz ve bu kümeyi $\varnothing$ simgesiyle göstereceğiz. Küme cebiri içinde boş küme, aritmetikteki 0 (sıfır) rolünü üslenir diyebiliriz.

Gerçekten 0 (sıfır) uzunluğu olmadığı halde bir sayıdır. Benzer şekilde boş küme de elemanı olmayan bir kümedir. Boş kümenin, **küme işlemlerinin formüle edilmesinde** önemli bir işlevi vardır.

Kümeler ya elemanları listelenerek listeleme yöntemi ile veya elemanlarını belirleyen bir kuralla ortak özellik yöntemi ile belirtilirler. Listeleme yönteminde kümenin elemanları { } biçiminde iki ayracın içine aralarına virgül konularak, istenilen sırada yazılırlar. Bu yazım biçimine açık yazım da denir. Ortak özellik yönteminde ise küme, kümeyi oluşturan elemanların hepsinin sağladığı ve kümenin öğelerini diğer nesne ve varlıklardan kesinlikle ayıran özelliği (özelliklerini) veren bir $P(x)$ açık önermesi yardımıyla $\{ x \mid P(x) \}$ biçiminde yazılır. Bu yazılış "***P(x)*** **önermesini sağlayan x öğelerinin kümesi**" biçiminde okunur. Bu yazım biçimine bazen kapalı yazım da denir.

ÖRNEK 1

a) a, b, c ***elemanlarından oluşan*** A ***kümesi, listeleme yöntemi ile*** $A = \{a, b, c\}$ ***biçiminde yazılır.***

Aynı küme, ortak özellik yöntemi ile $A = \{ x \mid x$ *alfabe'nin ilk üç harfi*$\}$ ***olarak yazılır.***

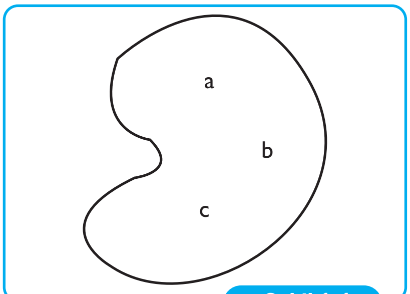
b) Kapalı biçimde verilen $B = \{ x \mid x^2 = 36 \}$ ***kümesinde***

$P(x) : x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6$

olacağından, listeleme yöntemiyle $B = \{-6, 6\}$ ***biçiminde de yazılır.***

c) $A = \{ x \mid x$ *sonu 2 ile biten tek doğal sayı*$\}$ ***kümesi*** $\varnothing$ ***(boş) kümedir.***

Bazı durumlarda, küme elemanları dikdörtgen, üçgen, çember, elips veya herhangi bir kapalı düzlemsel eğri içine yazılarak şema ile gösterilebilir. Böyle şemalara Venn şemaları denir. Örneğin $A = \{a, b, c\}$ ***kümesi şekil 1.1. deki gibi gösterilir.***



Şekil 1.1

KÜME İŞLEMLERİ

AMAÇ 2

Kümeler arasında iki kümeye yeni bir küme karşılık getirme şeklinde birçok işlem tanımlanabilir. Bu bölümde bunlardan bazılarını tanıtacağız.

A ve B kümelerinin tüm elemanları aynı ise A ve B kümelerine **eşit kümeler** denir. Bu durum $A = B$ ile gösterilir.

A ve B iki küme olsunlar. B nin her elemanı, A nın da bir elemanı ise B ye, A nın bir **alt kümesi** denir. Bu durum $B \subseteq A$ ile gösterilir.

Sembolik mantık diliyle

$$B \subseteq A \quad \Leftrightarrow \quad x \in B \quad \text{için} \quad x \in A$$

yazılır.

Özel olarak, $B \subseteq A$ ve A nın, B de olmayan en az bir öğesi varsa B ye, A nın **öz (has) alt kümesi** denir. Bu durumda $B \subset A$ yazılır.

B kümesi, A kümesinin bir alt kümesi değilse $B \not\subset A$ yazılır.

ÖRNEK 2

a) $B = \{ x \mid x < 10$ *ve* x *tek doğal sayı* $\} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$
ve $A = \{ x \mid x < 20,\ x$ *doğal sayı* $\} = \{ 0, 1, 2, 3, ..., 19 \}$ ***kümeleri için*** $B \subset A$ ***olur.***

b) Bir A ***kümesi için*** $x \in A \Rightarrow x \in A$ ***olduğundan*** $A \subseteq A$ ***olur.***

c) Her A ***kümesi için*** $\varnothing \subseteq A$ ***dır.***

Evrensel kümenin, problemden probleme değişeceği akıldan çıkarılmamalıdır.

Özel bir problemle ilişkili tüm kümeleri kapsayan yani sözkonusu problemle ilişkili tüm ögeleri bulunduran kümeye **evrensel küme** denir ve bu küme E ile gösterilir.

Bu bölüm boyunca, aksi söylenmedikçe, tüm kümeleri sabit bir E evrensel kümesinin alt kümesi olarak kabul edeceğiz.

E evrensel kümesi ve bunun herhangi bir A alt kümesi verilsin. E ye ait olan A ya ait olmayan bütün elemanların oluşturduğu kümeye ***A* kümesinin tümleyeni** denir. Bu küme A^t ile gösterilir.

Aynı küme $A^t = \{ x \mid x \in E \text{ ve } x \notin A \}$ olarak da tanımlanabilir.

ÖRNEK 3

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ***ve*** $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ***için*** A^t ***hangi kümedir?***

ÇÖZÜM

A^t kümesi E ye ait olan A 'nın elemanlarının dışındaki elemanlardan oluşacağından $A^t = \{ 5, 6, 7, 8 \}$ olur.

A ve B gibi iki küme verilsin.

a) A veya B den en az birine ait olan elemanların oluşturduğu kümeye ***A* ile *B* nin birleşim kümesi** denir. Bu küme $A \cup B$ ile gösterilir ve "***A* birleşim *B***" diye okunur.

b) A ve B kümelerinin her ikisine birden ait olan elemanların oluşturduğu kümeye ***A* ile *B* nin kesişim veya arakesit kümesi** denir. Bu küme $A \cap B$ ile gösterilir ve "***A* kesişim *B***" diye okunur.
Kesişimleri boş olan iki kümeye **ayrık kümeler** denir.

c) A kümesine ait olan, fakat B kümesine ait olmayan elemanlar kümesine ***A* ve *B* kümelerinin farkı** denir. Bu küme $A \setminus B$ biçiminde yazılır ve "***A* fark *B***" diye okunur.

Bu kümeleri kısaca

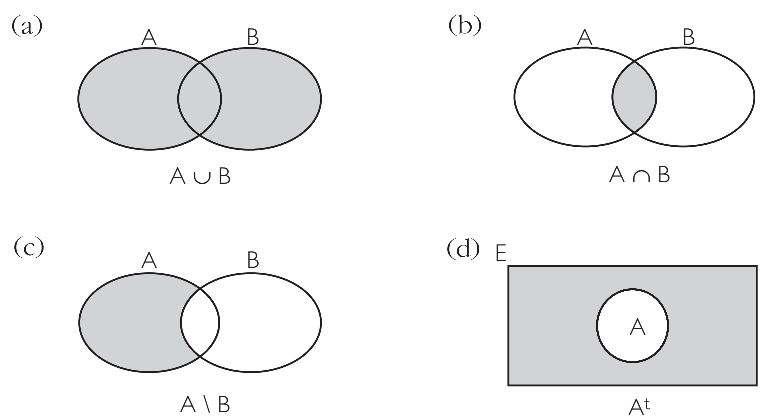
(a) $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ya da } x \in B \}$

(b) $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \in B \}$

(c) $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B \}$

biçiminde ifade ederiz.

Bu işlemleri şematik olarak da şöyle gösterebiliriz.



Şekil 1.2

ÖRNEK 4

Verilen* A, B *küme çiftleri için* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ *ve* $B \setminus A$ *kümelerini bulunuz.

a) $A = \{ a, b, c \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

b) $A = \{ x \mid x \text{ tek doğal sayı} \}$, $B = \{ x \mid x \text{ doğal sayı} \}$

ÇÖZÜM

a)
- $A \cup B = \{ a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
- $A \cap B = \varnothing$ olduğundan A ve B ayrık kümelerdir.
- $A \setminus B = A$ ve $B \setminus A = B$ dir.

b) $A = \{ 1, 3, 5, 7, \ldots \}$, $B = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$ olduğundan $A \subset B$ dir.
- $A \cup B = B$
- $A \cap B = A$
- $A \setminus B = \varnothing$ ve $B \setminus A = \{ 0, 2, 4, 6, \ldots \}$ olur.

A, B ve C kümeleri için aşağıdaki küme eşitlikleri vardır.

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	1'. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. $A \cup B = B \cup A$	2'. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cup \varnothing = A$, $A \cup E = E$	3' $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap E = A$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4'. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$	5'. $(A \cap B)^t = A^t \cup B^t$
6. $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$	6'. $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$

AMAÇ 3

Küme işlemlerine dayalı problemleri çözümleyebileceksiniz.

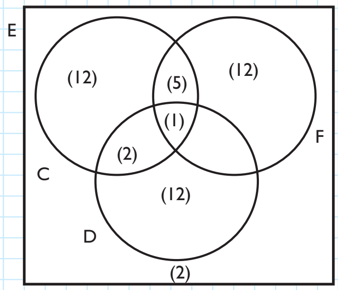
ÖRNEK 5

Belli bir A şehrinden, B şehrine giden yol üzerinde C, D ve F gibi üç konaklama yeri vardır. Belli bir gün içinde A şehrinden çıkıp, B şehrine ulaşan otobüs şöförlerine hangi konaklama yerlerinde konakladıkları sorulmuş ve şu yanıtlar alınmıştır.

20 si C de konakladığını,
15 i D de konakladığını,
18 i F de konakladığını,
6 sı C ve F de konakladığını,
3 ü C ve D de konakladığını,
1 i ise C, D ve F de
konakladığını, 2 otobüs şöförü ise hiçbir yerde konaklamadıklarını ifade etmişlerdir. O gün A şehrinden B şehrine kaç otobüs gelmiştir?

ÇÖZÜM

Konumuzla ilgili en geniş küme, A şehrinden çıkıp B şehrine giden otobüslerin kümesidir. Bu kümeye E diyelim. C konaklama yerinde duran otobüslerin kümesini C, D konaklama yerinde duran otobüslerin kümesini D, F konaklama yerinde duran otobüslerin kümesini F ile gösterelim. Problemle ilgili Venn şemasında

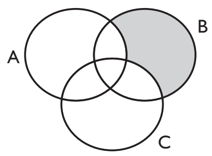


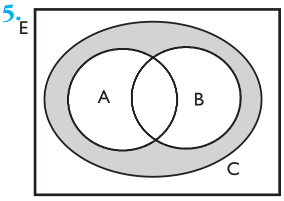
verilenler yerleştirilirse, E kümesi

$12 + 12 + 12 + 8 + 2 = 46$

46 otobüsten oluşmaktadır.

SIRA SİZDE 1

1. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{2, 5\}$ olmak üzere
   a) $A \setminus B$ **b)** $B \setminus A$ **c)** $A \cap B$ **d)** $A \cup B$
   kümelerini bulunuz.
2. $A = \{ a, b, c \}$, $B = \{ a, d, e \}$ ve $C = \{ d, e, a, b \}$ kümeleri veriliyor.
   $E = \{ a, b, c, d, e \}$ evrensel küme olmak üzere
   a) $A^t \cap B^t \cap C^t$ **b)** $(A - B) \cap C$
   c) $(A^t - C^t) \cup B$ **d)** $(A^t \cup B^t)^t$
   e) $(B \cup C) \setminus C^t$ **f)** $(A - C) - (B - A)$
   g) $[(B - A) - (C - A)] \cup (C - B)$ **h)** $(A - C) \cup B$
   kümelerini bulunuz.
3. $A \cup B = \{ a, b, c, d \}$, $A \cap B = \{ a, c \}$ ve $A \setminus B = \{ b \}$ ise A ve B kümelerini bulunuz.
4. 

   Taralı bölgeyi A, B, C kümelerini ve küme işlemlerini kullanarak ifade ediniz.
5. 

   Taralı bölgeyi A, B, C kümelerini ve küme işlemlerini kullanarak ifade ediniz.

SAYI KÜMELERİ

AMAÇ 4 ***Sayma sayıları, doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümelerinin neler olduğunu hatırlayıp, gerçel sayıların özel alt kümeleri olan aralıkları inceleyeceksiniz.***

Bu kesimde sayı kümelerinin yapılanmaları üzerinde durmadan uygulamada kullanıldıkları biçimiyle ele alıp tanıyacağız.

En iyi bildiğimiz sayı kümesi, ögelerini sayma için kullandığımız **sayma sayıları** kümesidir. Bu küme

$$1,2,3,\dots,\ n,\ n+1,\ \dots$$

sayılarından oluşur ve genellikle $\mathbb{N}^+$ ile gösterilir. Bu kümeye 0 (sıfır) katarak elde ettiğimiz kümeyi $\mathbb{N}$ ile gösterip bu kümeye **doğal sayılar** kümesi diyeceğiz. Doğal sayılar **tam sayılar kümesi** denilen ve elemanları

$$\dots,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots$$

olan kümenin bir alt kümesidir. Yazımından da anlaşılacağı gibi $\mathbb{Z}$ ile gösterilen tam sayılar kümesi N^+ nın öğelerinin önlerine eksi getirilerek oluşturulan $\mathbb{N}^-$ kümesi de kullanılarak

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^+$$

biçiminde yazılır.

Tam sayılar kümesi rasyonel sayılar kümesi adı verilen daha geniş bir sayılar kümesinin alt kümesidir. Bu küme sıfırla bölme kural dışı bırakılarak, tam sayıların birbirlerine bölümlerinden oluşan sayıların kümesidir ve genellikle $\mathbb{Q}$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a\ ,\ b \in \mathbb{Z}\ ,\ b \neq 0 \right\}$$

dır. Her $p \in \mathbb{Z}$ sayısı $p = \frac{p}{1}$ yazılabileceğinden $p \in \mathbb{Q}$ dur.

Böylece $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ olur.

Hesaplamalarda $\frac{p}{0} = y$ ise $p = 0\ .\ y$ eşitliği $p \neq 0$ olduğunda çelişki yarattığından **sıfırla bölme tanımsızdır**. Ayrıca sıfırı sıfıra bölersek tek bir değer bulamayız. Bu nedenle $\frac{0}{0}$ **belirsizdir** deriz.

Çok önceleri teorik olarak her fiziksel büyüklüğün bir kesirli sayı ile verileceğine inanılırdı. Ancak M.Ö.5.yy. da bunun doğru olmadığı geometrik metodla kanıtlandı. Daha sonraları $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılamayan sonsuz sayıda sayının varlığı gösterildi. Siz de dik kenarlarının uzunlukları 1 birim olan bir dik üçgenin hipotenüs uzunluğu olan $\sqrt{2}$ sayısının $\frac{a}{b}$ olarak yazılamayacağını görebilirsiniz.

Bu tür sayılara **irrasyonel sayılar** diyeceğiz ve irrasyonal sayılar kümesini I_r ile göstereceğiz. $\mathbb{Q} \cup I_r$ kümesine **gerçel sayılar** kümesi denir ve bu küme $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

Her x gerçel sayısı $a_0 \in \mathbb{N}$ ve $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olmak üzere

$$\pm\ a_0\ ,\ a_1\ a_2\ \ a_3 \dots a_n \dots$$

olarak yazılabilir. Bu yazıma ***x* in ondalık yazımı** denir.

Bu yazım kullanılarak rasyonel ve irrasyonel sayıları birbirinden ayırmanın başka bir yolu şöyle verilebilir:

$\frac{4}{3} = 1{,}333...$ (3 tekrar ediyor), $\frac{3}{11} = 0{,}272727...$ (27 tekrar ediyor)

$\frac{5}{7} = 0{,}714285714285...$ (714285 tekrar ediyor),

$-\frac{3}{5} = -0{,}7500...$ (0 tekrar ediyor)

Yukarıdaki rasyonel sayıların ondalık yazımlarına dikkat edilirse virgülden sonraki kısmın bir parçası sonsuz kez tekrarlanmaktadır. Bu tür sayılara **ondalık kısımları devirlidir** deriz ve bu durumu kısaca

$$\frac{4}{3} = 1{,}333... = 1{,}\overline{3}\ ,\ \frac{3}{11} = 0{,}272727... = 0{,}\overline{27}$$

$$\frac{5}{7} = 0{,}714285714285... = 0{,}\overline{714285}\ ,\ -\frac{3}{5} = -0{,}7500... = -0{,}75$$

biçiminde yazabiliriz.

Böyle devam edilirse $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilen tüm rasyonel sayıların ondalık kısımları devirlidir. Bunun tersi de doğrudur, yani devirli ondalık açılıma sahip olan sayılar $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilirler.

Örneğin ondalık açılımı $x = 0{,}125125... = 0{,}\overline{125}$ olan x sayısını $\frac{a}{b}$ biçiminde yazalım. x sayısının tekrarlanan kısmını virgülün soluna geçirmek için 1000 ile çarpıp, bulunan sayıdan x sayısını çıkaralım,

$$1000\,x = 125{,}\overline{125}$$
$$x = 0{,}\overline{125}$$
$$999\,x = 125$$

buradan $x = \frac{125}{999}$ rasyonel sayısı bulunur.

Bir sayının rasyonel olması için gerekli ve yeterli koşul bu sayının devirli bir ondalık açılımının olmasıdır.

Devirli ondalık açılıma sahip olmayan sayılara da **irrasyonel sayı** deriz. Örneğin π bir irrasyonel sayıdır, devirli ondalık yazılışı yoktur. Ancak bu yaklaşık olarak 3,14; 3,1415; 3,141592; ... sayılarından biri olarak alınabilir.

Gerçel sayıların kareleri negatif olmayacağından $x^2 = -1$ denkleminin çözümü gerçel sayı değildir.

18. yüzyıl matematikçileri bu çözümsüzlüğe yeni bir sayıyı $i = \sqrt{-1}$ biçiminde tanımlayarak çözüm getirdiler ve daha sonra gerçel sayıları da içine alan **karmaşık sayılar** diye adlandırılan bir sayı kümesi oluşturdular. Karmaşık sayılar kümesi genellikle $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

$$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}\ ,\ i = \sqrt{-1} \right\}$$

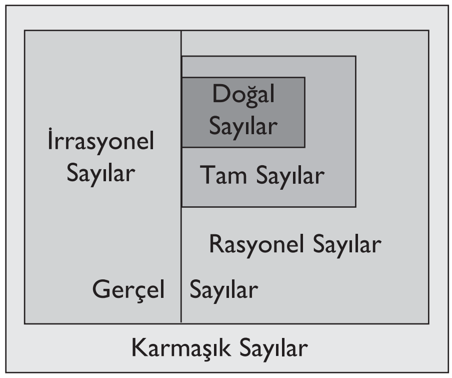
olmak üzere $a \in \mathbb{R}$ ise $a = a + 0i \in \mathbb{C}$ olduğundan $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ olduğu görülür.

Bundan böyle aksi söylenmedikçe sayı denilince gerçel sayılar anlaşılacaktır.

Böylece $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ olduğu aşağıdaki tablo ile özetlenebilir (Şekil 1.3).

Özetle

- $\mathbb{N}^+ = \{ 1, 2, 3, \dots \}$
- $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- $\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- $\mathbb{Q} = \{ x \mid x = a/b,\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \}$
  $= \{ x \mid x$ devirli ondalık yazılışa sahip $\}$
- $I_r = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I_r$
- $\mathbb{C} = \{ z \mid z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1} \}$ dir.



Şekil 1.3

SIRA SİZDE 2

1. **a)** $3,\overline{4}$ **b)** $12,\overline{25}$ **c)** $0,13\overline{412}$

devirli ondalık sayıların eşiti olan rasyonel sayıları bulunuz.

2. **a)** $\frac{146}{4}$ **b)** $\frac{17}{3}$ **c)** $\frac{5}{6}$

rasyonel sayıların devirli ondalık yazımını bulunuz.

SAYI EKSENİ

Gerçel sayıların geometrik modelini oluşturma fikri pratikte çok yararlı bir fikirdir. Bunu oluşturmak için önce bir doğru çizilir. Daha sonra bu doğru üzerinde **başlangıç noktası** diye adlandırılan bir nokta ile genellikle bu noktanın sağında, **birim uzunluğu ve yönü** belirleyecek olan bir başka nokta işaretlenir. Son olarak da gerçel sayılar bu eksen üzerine aşağıdaki biçimde yerleştirilir:

$a \in \mathbb{R}$ olsun.

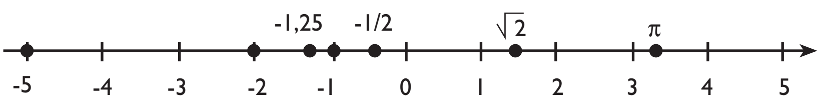
1. a sayısı **pozitif** ise **başlangıç noktasının sağında**, başlangıçtan a birim uzaklıktaki noktaya,
2. a sayısı **negatif** ise **başlangıç noktasının solunda**, başlangıçtan a birim uzaklıktaki noktaya,
3. a sayısı **sıfır** ise **başlangıç noktasına** (orijine) karşılık getirilir.

Bu düşünceyle her bir gerçel sayının eksen üzerinde bir yeri vardır. Eksen üzerindeki herbir noktanın başlangıç noktasına bir uzaklığı olduğundan her noktaya bir gerçel sayı karşılık gelir. Bu şekilde elde edilen sayı eksenine bazen **sayı doğrusu** da denir.

Eksen üzerindeki noktalarla gerçel sayılar kümesi 1-1 eşlenir. Bu yaklaşım modeliyle bu doğruya **sayı ekseni** veya **gerçel eksen** denir. Bu doğru üzerindeki her bir noktaya karşı gelen sayıya, **o noktanın koordinatı** denir.

ÖRNEK 6

$-5, -2, -1{,}25, -1, -1/2, 1, \sqrt{2}, 2, 3, \pi$ *ve* 5 ***gerçel sayılarının sayı ekseni üzerindeki sıralanışı şöyledir:***



Burada yaklaşık olarak $\sqrt{2} \cong 1{,}41$ $\pi \cong 3{,}14$ olduğu düşünülebilir.

SIRA SİZDE 3

1. **a)** $0,\overline{25}$ **b)** $2,\overline{9}$ **c)** $0,\overline{7}$ **d)** $-6,\overline{4}$

rasyonel sayılarını sayı ekseni üzerine yerleştiriniz.

2. **a)** $5\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{11}{15}$ **c)** $-\sqrt{2}$ **d)** -2π

gerçel sayılarını sayı ekseni üzerine yerleştiriniz

GERÇEL SAYILARDA SIRALAMA ÖZELLİKLERİ

a, b gerçel sayıları için $a \neq b$ ve sayı ekseni üzerinde b, a nın sağında yer alıyorsa, bu durum için "***a* küçüktür *b***" denir ve $a < b$ yazılır. Eğer $a = b$ veya $a < b$ ise $a \leq b$ yazılır ve "***a* küçük-eşit *b***" denir.

$$a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b - a$$

olduğu açıktır.

Sayılar arasında " $\leq$ " veya " $<$ " simgelerinden birinin kullanılmış olduğu bir ifadeye bir **eşitsizlik** denir.

Şimdi sayılar arasındaki eşitsizliklerle ilgili özellikleri kanıtsız olarak sıralayalım:

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun.

1) $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$ dir.

2) $a < b$ ve $c < d$ ise $a + c < b + d$ dir.

3) $a < b$ olsun. Her $k \in \mathbb{R}$ sayısı için $a + k < b + k$ dır.

4) $a < b$ olsun.
$k > 0$ ise $ak < bk$ ve $k < 0$ ise $ak > bk$ dır.
Özel olarak $k = -1$ ise $-a > -b$ dir.

5) $a > 0$ ise $\frac{1}{a} > 0$ olur.

6) $0 < a < b$ ise $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

7) $a \neq b$ ise $a < b$ veya $b < a$ dır.
Özel olarak $a \neq 0$ ise ya $a > 0$ veya $a < 0$ dır.

SIRA SİZDE 4

1. **a)** $\frac{3}{5}, \frac{7}{4}$ **b)** $-4, -\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{13}{4}$

verilen sayıları sıralayınız.

2. **a)** $\frac{2}{3}, \frac{21}{30}, \frac{11}{15}, \frac{4}{5}$ **b)** $-\pi$, $3,14$ **c)** $-\pi$, $3,14$, $-3,14$, π

verilen sayıları sıralayınız.

ARALIKLAR

Şimdi $\mathbb{R}$ 'nin aralık adını vereceğimiz özel alt kümeleri üzerinde duracağız.

$\mathbb{R}$ ye ait a, b $(a \leq b)$ gibi herhangi iki sayı arasındaki tüm gerçel sayılardan oluşan, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesine bir **aralık** denir. Bu a, b sayılarına **aralığın uç noktaları** denir. a sayısına aralığın **alt ucu**, b ye de **üst ucu** adı verilir.

Geometrik olarak aralık bir doğru parçasıdır. Uç noktaların oluşturulan kümeye ait olup olmayışına bağlı olarak aralıklara çeşitli isimler verilir.

- Uç noktalarının her ikisini de bulundurmayan aralık tipine **açık aralık** denir.
- Uç noktalarının her ikisini de bulunduran aralığa **kapalı aralık** denir.
- Uç noktalarından sadece birini bulunduran aralık tipine **yarı-açık aralık** denir. Bunlar iki tiptir. Alt ucunu bulundurmayıp üst ucunu bulundurana **soldan açık sağdan kapalı aralık** veya **alttan açık üstten kapalı aralık** denir. Üst ucunu bulundurmayıp alt ucunu bulunduran aralığa da **soldan kapalı sağdan açık aralık** ya da **alttan kapalı üstten açık aralık** denir.

Aralıkların kümesel yazımları dışında özel yazımları vardır. Bu yazımlarda uç noktaların, kümeye ait oluşu kapalı parantezle, kümeye ait olmayışı da açık parantezle gösterilir.

Aşağıdaki tabloda aralıkların kümesel tanımlanışı, gösterilişi, okunuşu (adlandırılışı) ve geometrik modeli özetlenmiştir.

ARALIKLAR

Kümesel Yazılışı	Gösterilişi	Okunuşu	Geometrik Modeli
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)	a, b açık aralığı	a b
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	a, b kapalı aralığı	a b
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Soldan açık, sağdan kapalı aralık	a b
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	Soldan kapalı, sağdan açık aralık	a b

Aralıklar pozitif yönde, negatif yönde veya her iki yönde sembolik ifadelerle genişletilebilirler. Her pozitif sayıdan daha büyük olduğu kabul edilen gerçel sayı olmayan bir sembolü $+\infty$ ile gösterip **artı sonsuz** diye okuyacağız. Benzer biçimde her negatif sayıdan daha küçük olduğu kabul edilen sembolü de $-\infty$ ile gösterip **eksi sonsuz** diye okuyacağız. Bunları kullanarak aşağıdaki aralıkları tanımlarız.

SINIRSIZ ARALIKLAR

Kümesel Yazılışı	Gösterilişi	Okunuşu	Geometrik Modeli
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	Soldan a ile sınırlı sağdan sınırsız kapalı aralık	a $+\infty$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	Soldan a ile sınırlı sağdan sınırsız açık aralık	a $+\infty$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	$(-\infty, b)$	Soldan sınırsız sağdan b ile sınırlı açık aralık	$-\infty$ b
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	Soldan sınırsız sağdan b ile sınırlı kapalı aralık	$-\infty$ b

Aralıklar $\mathbb{R}$ nin özel alt kümeleri oldukları için küme işlemleri bunlar için de geçerlidir. Şimdi aralıkların kesişimi, birleşimi, farkına ilişkin örnekler verelim.

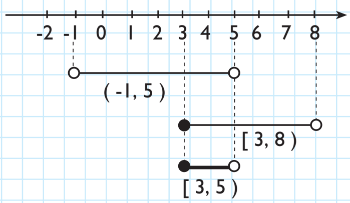
ÖRNEK 7

Aşağıdaki işlemleri sonuçlandırınız.

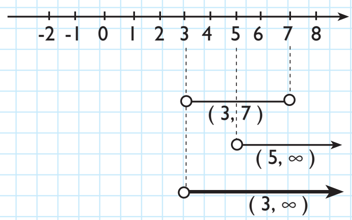
a) $[3, 8) \cap (-1, 5)$ b) $(3, 7) \cup (5, +\infty)$

ÇÖZÜM

a)



b)



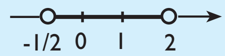
Her iki aralığada ait öğelerin kümesi $[3, 5)$ aralığıdır.

$(3, 7) \cup (5, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \}$
$= (3, +\infty)$

SIRA SİZDE 5

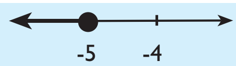
1. a) $[-1, 5/2)$ **b)** $(3, 7)$ **c)** $[-2, 2]$
aralıklarını kümesel olarak ifade edip geometrik modellerini sayı doğrusunu kullanarak gösteriniz.

2.

Kümesel Yazılışı	Gösterilişi	Okunuşu	Geometrik Modeli
$\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0 \}$			
		-4, -1 kapalı aralığı	
			

verilen tabloyu tanımlayınız.

3.

Kümesel Yazılışı	Gösterilişi	Okunuşu	Geometrik Modeli
$\{ x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq -3 \}$			
		Soldan sınırsız sağdan 3 ile sınırlı açık aralık	
			

verilen tabloyu tamamlayınız.

4. a) $(-\infty, 3) \cap (-1, +\infty)$ **b)** $(-\infty, -1) \setminus [-5, 3)$
aralıklarını kümesel olarak ifade edip geometrik modellerini sayı doğrusunu kullanarak gösteriniz.

5. Normal koşullarda su 0˚C'den küçük sıcaklıklarda katı (buz), 0˚ ile 100˚C arasında sıvı ve 100˚C'den büyük sıcaklıklarda gaz (buhar) halindedir. Bu durumları aralıkları kullanarak ifade ediniz.

ÜSLÜ VE KÖKLÜ ÇOKLUKLAR

Bu kesimde bir gerçel sayının üssünden ve kökünden söz edeceğiz.

AMAÇ 5

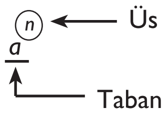
Bir gerçel sayının üssünü, kökünü ve bunlar üzerindeki işlemleri öğreneceksiniz.

Üslü Çokluklar

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için n tane a nın çarpımı kısaca a^n ile gösterilip ***a* üssü *n*** diye okunur. Bu durumda

$$a^n = \underbrace{a.\ a.\ a \ldots a}_{n \text{ tane}}$$

dir. ***a^n* sayısına *a* sayısının *n* yinci kuvveti** denir. Bu gösterimde ***a* sayısına taban, *n*** ye de **üs** denir.



Ayrıca $a^0 = 1$ ve $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ olarak tanımlanır. $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $(a^m)^n = a^{m.n}$
4. $(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{b^n}{a^n}$
7. $b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $b\, a^n \pm c\, a^n = (b \pm c)\, a^n$ olur.

İleride göreceğimiz denklem ve eşitsizliklerin çözümünde aşağıdaki özellikler kullanılacaktır.

- $a \in \mathbb{R} \setminus \{ -1, 0, 1 \}$ olmak üzere $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$
- $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a^n = b^n$ olsun.
  n tek ise $a = b$ dir.
  n çift ise ya $a = b$ veya $a = -b$ dir.
- $a > 0$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $a^n > 0$ dir.
  $a < 0$ olsun. n tek ise $a^n < 0$, n çift ise $a^n > 0$ olur.

ÖRNEK 8

a) 2^8 ***b)*** $\dfrac{2^8}{32}$ ***c)*** $(27)^2$ ***d)*** $(5.3^3)^2$

e) $\left(\dfrac{4^3}{4^2}\right)^3$ ***f)*** $\left(\dfrac{8}{64}\right)^{-3}$ ***g)*** $2^6 \,.\, 5^4$

işlemlerini sonuçlandırınız.

ÇÖZÜM

a) $2^8 = 2^{4+4} = 2^4 .\ 2^4 = 16.\ 16 = 256$

b) $\dfrac{2^8}{32} = \dfrac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3 = 8$

c) $(27)^2 = (3^3)^2 = (3^2)^3 = (9)^3 = 9.\ 9.\ 9 = 729$

d) $(5\ .3^3)^2 = 5^2 \,.\, (3^3)^2 = 25 \,.\, 729 = 18225$

e) $\left(\dfrac{4^3}{4^2}\right)^3 = \left(4^{3-2}\right)^3 = 4^3 = 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 64$

f) $\left(\dfrac{8}{64}\right)^{-3} = \left(\dfrac{64}{8}\right)^3 = \left(\dfrac{8^2}{8}\right)^3 = 8^3 = 8 \,.\, 8 \,.\, 8 = 512$

g) $2^6 \,.\, 5^4 = 2^2 \,.\, 2^4 \,.\, 5^4 = 4 \,.\, 10^4 = 40000$

Köklü Çokluklar

Şimdi köklü çokluk tanımını verelim ve köklü çokluklara ilişkin temel özellikleri görelim:

$a \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $b^n = a$ olacak şekilde negatif olmayan tek bir b sayısı vardır. Bu ***b* gerçel sayısına *a* sayısının *n*. kuvvetten kökü** denir ve bu b sayısı

$$\sqrt[n]{a} \quad \text{veya} \quad a^{1/n}$$

biçiminde gösterilir. Simgesel olarak,

$$b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

dir. Eğer $a < 0$ ve n tek doğal sayı ise, $\sqrt[n]{a}$ yine tanımlıdır ve bu durumda

$$b = \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$$

dır. Bu b sayısının negatif olduğu açıktır.

$a < 0$ ve n çift doğal sayı olma durumunda $\sqrt[n]{a}$ tanımlı değildir.

Ayrıca $a \neq 0$ ve $a^{1/n}$ tanımlı ise

$$a^{-1/n} = \frac{1}{a^{1/n}}$$

dir.

Benzer olarak, m, n doğal sayılar ve $n \neq 0$ olmak üzere, $a \geq 0$ veya $a < 0$ olmakla birlikte n tek ise,

$$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

olur.

ÖRNEK 9

a) $\sqrt[5]{32} = ?$ ***b)*** $\sqrt[3]{-8} = ?$

ÇÖZÜM

a) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2^{5/5} = 2^1 = 2$

b) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = (-2)^{3/3} = (-2)^1 = -2$

ÖRNEK 10

$x = \sqrt{-1}$ ***eşitliğini sağlayan hiç bir x gerçel sayısı bulunamayacağını gösteriniz.***

ÇÖZÜM

$$x^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = (-1)^{2/2} = (-1)^1 = -1$$

olacağından $x^2 = -1$ eşitliğini sağlayan x gerçel sayısı olsaydı bu x sayısı ya

$x < 0$ veya $x = 0$ ya da $x > 0$ olacaktı.

$x < 0 \Rightarrow x \,.\, x = x^2 > 0 \Rightarrow x^2 \neq -1$

$x = 0 \Rightarrow x \,.\, x = 0 \,.\, 0 \Rightarrow 0^2 = 0 \neq -1$

$x > 0 \Rightarrow x \,.\, x = x^2 > 0 \Rightarrow x^2 \neq -1$ olur ki böyle bir $x \in \mathbb{R}$ bulunamaz.

Köklü ifadelerin bazı işlemleri üslü ifadelerden kolayca elde edilir.

$a, b > 0$, $c, d \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{1/n} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \left(\dfrac{a}{\mathrm{b}}\right)^{1/n} = \dfrac{a^{1/n}}{\mathrm{b}^{1/n}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3. $c\sqrt[n]{a} \pm d\sqrt[n]{a} = (c \pm d)\sqrt[n]{a}$

olur.

SIRA SİZDE 6

1. **a)** $(-2)^2 - 2^2 - 2^3 - (-2)^3 = ?$ **b)** $\dfrac{6^5 \cdot 14^4 \cdot 15^3}{21^4 \cdot 10^2 \cdot 12^3} = ?$

c) $\left[\dfrac{a^5}{b^4}\right]^3 \cdot \left[\dfrac{b^2}{a^3}\right]^4 = ?$ **d)** $27^{-6} \cdot \left(-\dfrac{1}{3^2}\right)^{-8} = ?$

2. **a)** $\sqrt{108} - \sqrt{48} + \sqrt{27} = ?$ **b)** $3\sqrt{50} + \sqrt{128} - 4\sqrt{242} = ?$

c) $\sqrt[6]{10} \cdot \sqrt[6]{100} \cdot \sqrt[6]{1000} = ?$ **d)** $4\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} + 5\sqrt[3]{7} = ?$

3. **a)** $\sqrt[4]{(-3)^4} = ?$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{4\sqrt{20}} \cdot \sqrt{2\sqrt{\sqrt{625}}}}{4\sqrt{5}} = ?$

c) $\dfrac{4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3}{2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2}$

MUTLAK DEĞER

AMAÇ 6

Mutlak değer kavramına dayalı olarak gerçel eksen üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplamayı öğreneceksiniz.

- Her $a \in \mathbb{R}$ için $|a| \geq 0$ dır.
- Her $a \in \mathbb{R}$ için $|a| = \sqrt{a^2}$ dir. Çünkü a Ó0 ise $\sqrt{a^2} = a = |a|$ ve $a < 0$ ise $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a = |a|$ dır. $|a| = \sqrt{a^2}$ eşitliği özellikle çift kuvvetten köklü denklemlerde kullanılır.

Mutlak değer kavramı, cebirsel olarak kök içeren hesaplamalarda ve geometrik olarak da iki nokta arasındaki uzaklık kavramının belirlenmesinde önemli rol oynar.

Bir $a \in \mathbb{R}$ sayısının 0 (sıfır) a olan uzaklığına a sayısının **mutlak değeri** veya **büyüklüğü** denir. Bu sayı $|a|$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle

$$|a| = \begin{cases} a \ ; & a > 0 \text{ ise} \\ 0 \ ; & a = 0 \text{ ise} \\ -a \ ; & a < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dır.

Aşağıdaki özellikler tanım kullanılarak kolayca elde edilir.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için;

1. $|a| = \sqrt{a^2}$ 2. $|a|^2 = a^2$ 3. $|-a| = |a|$

4. $-|a| \leq a \leq |a|$ 5. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ 6. $|a^n| = |a|^n$

7. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ 8. $|a - b| = |b - a|$ 9. $|a + b| \leq |a| + |b|$

10. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ 11. $|a| = \max\{-a, a\}$

Mutlak değer kavramı doğal olarak **uzaklık** kavramını gündeme getirir. Sayı doğrusu üzerinde koordinatları a ve b olan A ve B noktalarını alalım. Uzaklığın negatif olmayışından, A ve B noktaları arasındaki uzaklığa $\boldsymbol{d}$ denirse, B, A nın sağında olduğunda $b - a$ negatif değildir. Bu durumda

$$d = b - a = |b - a|$$

dir. A, B nin sağında ise $a - b$ negatif değildir.

$$d = a - b = -(b - a) = |b - a|$$

dir. Böylece $d = d(A, B) = |b - a|$ dır.

$d = d(A, B) = |b - a|$

Şimdi ileride mutlak değerli denklem ve eşitsizliklerde kullanacağımız birkaç ifade verelim.

Gösterilişi	Geometrik Anlamı
$\lvert x - a \rvert$	x ile a arasındaki uzaklık
$\lvert x + a \rvert = \lvert x - (-a) \rvert$	x ile $-a$ arasındaki uzaklık
$\lvert x \rvert = \lvert x - 0 \rvert$	x ile 0 (sıfır) arasındaki uzaklık

ÖRNEK 11

Koordinatları a ve b olan A ve B noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

a) $a = 3$, $b = 7$ ***b)*** $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ ***c)*** $a = 0$, $b = -7$

ÇÖZÜM

a) $d(A, B) = |b - a| = |7 - 3| = |4| = 4$

b) $d\left(-\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left|\dfrac{1}{\sqrt{2}} - (-\sqrt{2})\right| = \left|\dfrac{1 + 2}{\sqrt{2}}\right| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

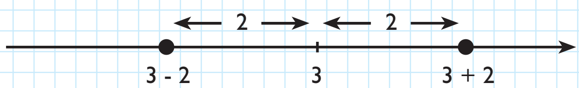
c) $d(0, -7) = |-7 - 0| = |-7| = -(-7) = 7$

ÖRNEK 12

a) $|x - 3| = 2$ ***b)*** $|x - 5| < 1$ ***c)*** $|x + 3| > 3$ ***çözüm kümelerini bulunuz.***

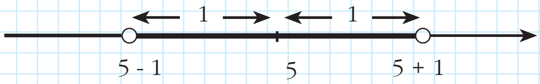
ÇÖZÜM

a) $|x - 3| = 2$, 3 noktasına 2 birim uzaklıktaki x noktaları



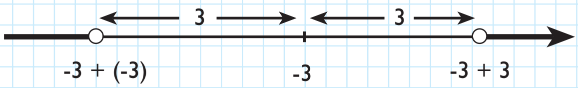
olacağından Ç = {1, 5} dir.

b) $|x - 5| < 1$, 5 noktasına uzaklığı 1 birimden küçük olan x noktaları



olacağından $Ç = (4, 6)$ aralığıdır.

a) $|x + 3| = |x - (-3)| > 3$, -3 noktasına uzaklığı 3 birimden büyük olan x noktaları



olacağından $Ç = (-\infty, -6) \cup (0, \infty)$ aralığıdır.

SIRA SİZDE 7

1. Koordinatları a ve b olan A ve B noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

a) $a = -7,\ b = 7$ **b)** $a = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ b = -\sqrt{2}$ **c)** $a = -\dfrac{5}{7},\ b = \dfrac{3}{7}$

2. Mutlak değerin geometrik anlamını kullanarak aşağıdaki koşulların herbirine uyan x'lerin kümelerini bulunuz.

a) $|x + 2| = 3$ **b)** $|x - 7| < 4$ **c)** $|x + 5| > 2$

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

(1845 - 1918)

Cantor, kümeler kuramını kuran ve sonsuz nicelik sayısı kavramını ortaya koyan ünlü matematikçidir.

"Matematikte bir soru ortaya koyabilme, soruyu çözmekten daha değerlidir."

Georg CANTOR

"Sonsuz ! Başka hiçbir problem insan zihnini bu kadar karıştırmamıştır."

David HILBERT

Kendimizi Sınayalım

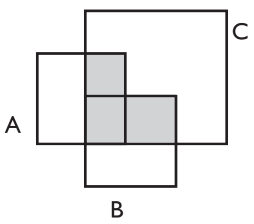
1. "MATEMATİK" ve "İSTATİSTİK" kelimelerinin harflerinin oluşturdukları kümeler sırasıyla A ve B olsunlar. $A \cap B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\{ T, A, K \}$
b. $\{ K, A, T, E \}$
c. $\{ K, A, İ \}$
d. $\{ İ, T, A, K \}$
e. $\{ A, T, S, İ \}$

2. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 5, 9\}$ ve
$C = \{ x \mid x^2 = 9, x \in \mathbb{N}\}$
kümeleri veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

a. $C \subset A$
b. $C \subset B$
c. $A \cap B \cap C = C$
d. $B \cup C \subset A$
e. $B \cap C = B$

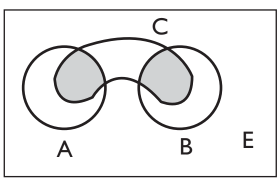
3.



$A \cup B \cup C = E$ olmak üzere A, B ve C kümeleri birer dikdörtgen ile gösterilmiştir. Aşağıdakilerden hangisi taralı olarak verilen küme değildir?

a. $(A \cup B) \setminus C$
b. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
c. $(A \cup B) \setminus C^t$
d. $(A^t \cap B^t)^t \cap C$
e. $(A \cup B) \cap C$

4.



Taralı olarak verilen küme aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(A \cup B) \setminus C$
b. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
c. $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
d. $(A \cup B)^t \setminus C^t$
e. $(A \cup B)^t \cup C$

5. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve a bir doğal sayı olmak üzere $a\mathbb{N} = \{ak \mid k \in \mathbb{N}\}$ kümesini göstersin. Buna göre $3\mathbb{N} \cap 7\mathbb{N}$ kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $3\mathbb{N}$
b. $7\mathbb{N}$
c. $10\mathbb{N}$
d. $21\mathbb{N}$
e. $4\mathbb{N}$

6. A ve B herhangi iki küme olduğuna göre, $A \setminus B$ kümesi aşağıdakilerden hangisine eşit değildir?

a. $A \cap B^t$
b. $(A^t \cup B)^t$
c. $B^t \setminus A^t$
d. $(A \cup B^t)^t$
e. $A \cap (A \cap B)^t$

7. $A = \{ x \mid x \in \mathbb{N}$ ve $1 < x \leq 8 \}$ ve
$B = \{ x \mid x \in \mathbb{N}$ ve $x \geq 3\}$
ise $(A \cap B)^t$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\{ 2, 3 \}$
b. $\{ 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$
c. $\mathbb{N} \setminus \{2, 3\}$
d. $\mathbb{N} \setminus \{ 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$
e. $\mathbb{N} \setminus \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$

8. Aşağıdakilerden hangisi rasyonel sayı değildir?

a. 0,232323...
b. $3,\overline{576}$
c. 1,267
d. 0,323323332...
e. $0,\overline{2562}$

9. Aşağıdakilerden hangisi bir irrasyonel sayıdır?

a. $\sqrt[3]{-8}$
b. $\dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{27}}$
c. $\dfrac{3\sqrt{18}}{2\sqrt{6}}$
d. $\dfrac{12}{\sqrt{4}}$
e. $\dfrac{1}{3}$

10. $a > b > 0$ ve $c = \dfrac{a + 6b}{b}$ olduğuna göre, c'nin alacağı tüm değerler, aşağıdaki aralıkların hangisindedir?

a.


b.


c.


d.


e.


11. $a < b$ ve $ka > kb$ ise, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

a. $k^3 < 0$
b. $-k > 0$
c. $k > 0$
d. $a - b < 0$
e. $k^3 < k^2$

12. $a \,.\, b > 0$ ifadesine denk olan ifade, aşağıdakilerden hangisidir?

a. $a > b$
b. $b > 0$
c. $a > 0$
d. $a^2 - b^2 > 0$
e. $\frac{a}{b} > 0$

Biraz Daha Düşünelim

1. Aşağıdaki devirli ondalık sayıların eşiti olan rasyonel sayıları belirleyiniz.

a) $6,242424 = 6,\overline{24}$
b) $3,\overline{913}$
c) $0,\overline{339}$
d) $1,\overline{1347}$

2. Verilen rasyonel sayıların devirli ondalık yazılımını bulunuz.

a) $\frac{3}{7}$
b) $\frac{37}{125}$
c) $\frac{127}{27}$
d) $\frac{13}{133}$

3. Verilen sayıları sıralayınız.

a) $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{4}{3}$, $c = \frac{-3}{4}$, $d = \frac{1}{6}$

b) $a = \frac{15}{17}$, $b = \frac{18}{19}$, $c = \frac{37}{32}$

4. $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 7 \}$, $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4 \}$ kümelerini bulunuz?

a) $A \cap B$
b) $A \setminus B$
c) $A \cup B^t$
d) $B \setminus A^t$

5. Verilen tabloyu tamamlayınız.

A	B	A / B	A ∩ B	A \ B	B \ A
(3, 7)	(-1, 5)				
(-∞, 3)	(2, 7)				
(-∞, 3)	[-1, ∞)				
(-3, 5)	[3, 11]				
[-2, 4]	(0, ∞)				

6. a) $\dfrac{(2^2)\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{(-2)^4} = ?$

b) $\dfrac{(3{,}25)^{-5}}{(32{,}5)^{-5}} \,.\, \dfrac{(0{,}02)^{-2}}{(0{,}04)^{-2}} = ?$

c) $(0{,}8)^3 \,.\, (0{,}125)^2 = ?$

d. $\dfrac{(-2)^{-2} . (-4)^{-5}}{(-8)^{-4}} = ?$

e) $\left[4 \,.\, (-4^{-1/3})^3\right]^3 = ?$

f) $\dfrac{2^{93} - 2^{92}}{2^{94}} = ?$

7. a) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{16}}} = ?$

b) $\sqrt[3]{4} \; \sqrt[4]{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = ?$

c) $\sqrt{1{,}44} - \sqrt[3]{0{,}008} - 4\sqrt[4]{0{,}0081} = ?$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{9}\,\sqrt[6]{3}}{\sqrt{3}} = ?$

e) $x^{3/2} = 27$ ise $x = ?$

8. $\sqrt[4]{-16}$ 'nın bir gerçel sayı olmadığını görünüz.