4

Fonksiyonlar

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra,

- *fonksiyon kavramını öğrenecek,*
- *bir fonksiyon verildiğinde tanım ve görüntü kümesinin bulunuşunu öğrenecek,*
- *bir fonksiyonun grafiğini çizebilecek,*
- *matematiksel model oluşturabilecek,*
- *fonksiyonların temel özelliklerini öğrenecek, bunları grafik çiziminde kullanabilecek,*
- *fonksiyonlar üzerindeki işlemleri yapabilecek,*
- *bir fonksiyonun tersini bulabilecek,*
- *fonksiyonların sınıflandırmasını öğreneceksiniz.*

İçindekiler

- *Fonksiyon Kavramı*
- *Bir Fonksiyonun Tanım ve Görüntü Kümelerinin Bulunuşu*
- *Matematiksel Model Oluşturma*
- *Fonksiyonların Özellikleri*
- *Fonksiyonlarla Yapılan Cebirsel İşlemler*
- *Bileşke Fonksiyon*
- *Ters Fonksiyon*
- *Fonksiyon Türleri*

DİKKAT

- ***fonksiyon tanımı iyi öğrenilmeli,***
- ***matemetiksel model oluşturmak için çaba sarf edilmeli,***
- ***fonsiyonların özellikleri öğrenilerek grafik çizimlerinde nasıl kullanıldığı üzerinde durulmalı,***
- ***fonksiyonlarla işlem yapabilmek için verilen alıştırmalar çözülmelidir.***

Giriş

Bir firma ürettiği her bir ürünü a TL. den satıyor. Her bir ürün için b TL. lik hammadde gideri ve c TL. lik işçi ücreti ödeniyor. Firmanın yıllık sabit giderleri d TL. dir. x satılan ürün sayısını göstermek üzere yıllık kâr fonksiyonunu x cinsinden bulunuz.

Fen ve mühendislik alanında olduğu kadar ekonomi alanında da birçok probleme çözüm aranırken matematiğin yol gösteriliciliğinden yararlanılır. Bunun için önce verilen problem matematiksel biçimde ifade edilmelidir. Buna ***problemin matematiksel modelinin kurulması*** *denir. Bir problemin matematiksel çözümü için önce onun matematiksel modelinin kurulması gerekir. Matematiksel modelin kurulması genelde* ***veriler arasındaki ilişkiyi düzenleyen bir bağıntının oluşturulması*** *biçiminde olur. Sözel ifade edilen bir problemin matematiksel modeli ve bu modelin kuruluşu, çözümü* ***cebirsel, nümerik*** *ya da* ***geometrik*** *yollardan biriyle yapılır. Cebirsel yol, problemin analitik olarak ifade edilebilmesidir. Yani bir formül, bir fonksiyon veya bir denklem olarak yazılabilmesidir.* ***Nümerik yol,*** *verilerden uygun şekilde nümerik sonuçların çıkarılmasıdır.* ***Geometrik yol*** *ise, problemin veya çözümünün bir şema, bir çizim veya bir grafik yardımıyla gösterilebilmesidir. Elbette bu yolların kimi zaman biri, kimi zamanda birkaçı birlikte kullanılabilir. Uygun yolun hangisinin olacığının seçimi, matematik bilgisi ve problem çözme becerisine bağlıdır. Fakat şunu da unutmamak gerekir; günlük yaşamın çeşitli alanlarında karşılaşılan problemlerin matematiksel çözümleri teorik sonuçlardır. Her zaman gerçek yaşamdaki sonuçlar olmayabilir. Ancak problemin matematiksel modeli iyi kurulmuşsa, modelin çözümü gerçek çözüm olmasa da onun iyi bir yaklaşımıdır.*

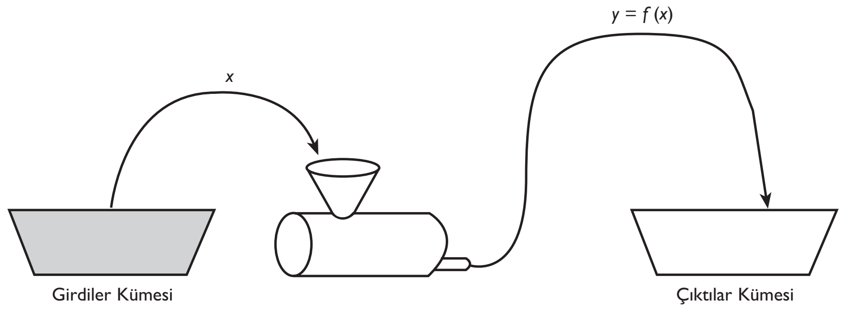
Fonksiyon kavramı matematiğin en temel kavramlarından biridir. Bir değişkene başka bir değişkeni karşılık getirme olarak tanımlanabilecek bu kavram iyi kavranılmadan matematiksel model kurma ve ona çözüm aramadan söz edilemez.

Bu ünitede ***fonksiyon kavramı*** *verilecek ve özellikleri incelenecektir. Ayrıca fonksiyonların grafiklerle gösterimlerinin öneminden söz edilecek ve bazı temel fonksiyonların grafiklerinin çizimleri yapılacaktır.*

FONKSİYON KAVRAMI

AMAÇ 1 ***Fonksiyonun ne olduğunu anlayacaksınız.***

Fonksiyonu, bir girdiye bir ve yalnız bir çıktı veren **girdi-çıktı makinesi** olarak da düşünebiliriz.



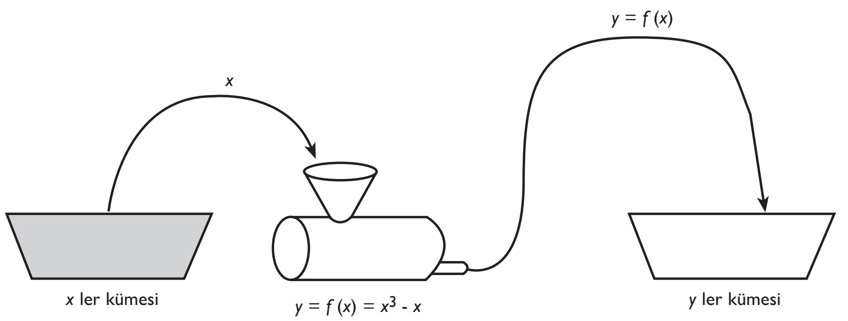
Şekil 4.1

Bunu bir örnekle açıklayalım. Bugün birçok hesap makinesinde $\frac{1}{x}$, a^x, $\log x$, y^x gibi tuşlar vardır. Bir sayı yazıp bu tuşlardan birine,

örneğin; $\frac{1}{x}$ e basılırsa ekranda, verilen sayısının çarpımsal tersi görülür. Hesap makinesinin $\frac{1}{x}$ tuşu (0 hariç) her bir sayıyı, çarpımsal tersine taşıdığından bir fonksiyon tanımlar. Benzer şekilde bir sayı yazıp x^2 tuşuna basılırsa ekranda, verilen sayının karesi görülecektir. Böylece x^2 tuşu da başka bir fonksiyon tanımlayacaktır. Bu nedenle bu tuşlara fonksiyon tuşları denir. Ancak bu tuşlardan y^x tuşu diğerlerinden farklıdır. Bir sayı yazıp y^x e basarsanız sonuç alamazsınız. Fakat önce 2 ye, sonra y^x e, daha sonra 3 e basar yani iki girdi verirseniz eşite basıldığında ekranda 8 belirecektir. Bu durumda iki değişkenli bir fonksiyon ortaya çıkacaktır.

$y = f(x) = x^3 - x$ denklemini göz önüne alalım. Bir x değeri girdi olarak alınırsa buna bir tek y çıktısı karşı gelecektir.

Gerçekten;



Şekil 4.2

ile gösterirsek, bu makine önce x girdisinin kübünü alıyor, x i bundan çıkarıyor ve bunu y çıktısı olarak veriyor diyebiliriz.

Örneğin;

x = girdi	y = çıktı
$x = 1$	$y = f(1) = 1^3 - 1 = 0$
$x = 2$	$y = f(2) = 2^3 - 2 = 6$
$x = 3$	$y = f(3) = 3^3 - 3 = 24$

olur. *"x in kübünü al x i bundan çıkar"* komutunu gerçekleştiren bu makinede $y = x^3 - x$ denklemi makinenin yapacağı işi tanımlayan bir matematiksel kural vermektedir. Bu kural bir x girdisine bir ve yalnız bir y çıktısı karşılık getirmektedir.

Her bir x girdisine, bir ve yalnız bir y çıktısı karşı getiren bir $y = f(x)$ matematiksel kuralına fonksiyon denir.

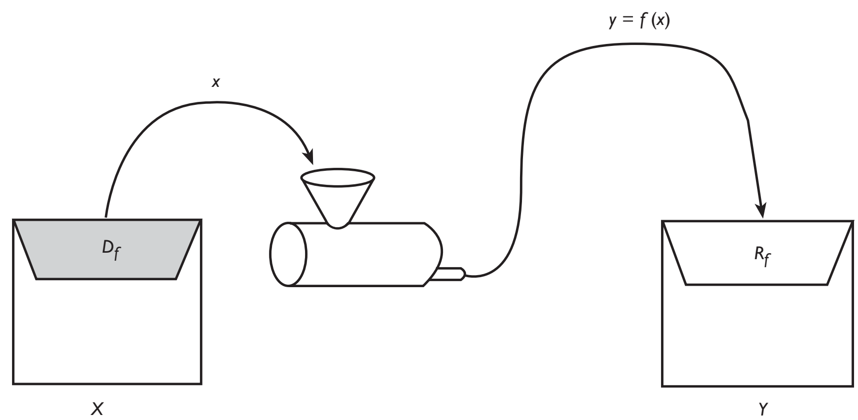
Fonksiyonu veren $y = f(x)$ kuralında x değiştikçe, y de buna bağlı olarak değişecektir. Bu nedenle x e **bağımsız değişken,** y ye de **x e bağlı** ya da kısaca **bağımlı değişken** denir.

$y = f(x)$ denklemini anlamlı yapan tüm x girdilerinin kümesine f fonksiyonunun **tanım kümesi,** tüm y lerin kümesine de f fonksiyonunun **görüntü kümesi** denir. Bu kümeler sırasıyla D_f ve R_f ile gösterilirler. D_f ve R_f, sırasıyla X ve Y gibi iki kümenin alt kümeleri ise f yi simgesel olarak

$$f : D_f \subset X \to Y$$

biçiminde gösteririz.

- Fonksiyon $y = f(x)$ kuralıyla verilmişse $D_f = \{ x \in X \mid y = f(x) \}$ ve $R_f = \{ y \in Y \mid x \in D_f$ için $y = f(x) \}$ olur.
- Genel olarak, D_f ve R_f, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin bir alt kümesi olarak alınacaktır.



Şekil 4.3

Bir Fonksiyonun Tanım ve Görüntü Kümesinin Bulunuşu

AMAÇ 2

Bir fonksiyon verildiğinde tanım ve görüntü kümesini bulabileceksiniz.

Bazı durumlarda fonksiyonu tanımlayan kişi tanım ve görüntü kümelerini kendisi verebilir. Bu durumda yapacak bir şey yoktur. Çoğu zaman f fonksiyonu $y = f(x)$ eşitliği ile verilir. O zaman eşitliği anlamlı yapan x lerin kümesi D_f yi ve en az bir x için $y = f(x)$ eşitliğini sağlayan y lerin kümesi de R_f yi oluşturacaktır.

f, bir problemde sözel olarak ifade edilmişse önce f nin kuralı bulunur, daha sonra f nin tanım ve değer kümeleri probleme göre belirlenir.

ÖRNEK 1

Verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-7x}$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ ***e)*** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

ÇÖZÜM

Verilen bütün fonksiyonlar $y = f(x)$ biçiminde verildiğinden tanım kümesi için $y = f(x)$ i sağlayan x leri, görüntü kümesi için de aynı eşitliği anlamlı yapan y leri araştıracağız.

a) Negatif sayıların kareköklerinin olmadığını biliyoruz. $y = \sqrt{x-1}$ eşitliğinde $x - 1 < 0$ olamaz, olursa eşitlik anlamsız olur. Bu nedenle

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \geq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \} = [1, \infty)$$

olur. Şimdi de görüntü kümesini bulalım. $\sqrt{x-1}$ önüne eksi işareti gelmedikçe negatif olamaz. $x \geq 1$ için $y = \sqrt{x-1} \geq 0$ olur ki bu

$$R_f = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \} = [0, \infty)$$

demektir.

b) Aranan tanım kümesi $y = \dfrac{x-3}{x^2-7x}$ eşitliğini anlamlı yapan x lerin kümesidir.

$\dfrac{A}{0} = \infty$ ve sonsuzun bir gerçel sayı olmadığını biliyoruz.

Bu eşitlikte paydayı 0 yapan x ler için eşitlik anlamsız olacağından

$$\begin{aligned} D_f &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x \neq 0 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x(x-7) \neq 0 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ ve } x \neq 7 \} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0, 7\} = (-\infty, 0) \cup (0, 7) \cup (7, +\infty) \end{aligned}$$

olur. Görüntü kümesi kolayca bulunamaz.

Çoğu zaman görüntü kümesini analitik yoldan elde etmek kolay değildir. Ancak grafiği çizilerek kolayca belirlenebilir.

c) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$ fonksiyonunun tanım kümesinin $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ -2 \}$ olduğu kolayca görülebilir. Şimdi bu eşitliği anlamlı yapan y lerin kümesini bulalım. $y = \dfrac{x-2}{x+2}$ eşitliğinden x i çekersek

$$(x+2)\,y = x-2 \quad \Rightarrow \quad xy + 2y = x - 2$$
$$\Rightarrow \quad xy - x = -2y - 2$$
$$\Rightarrow \quad x\,(y-1) = -2\,(y+1)$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{2\,(1+y)}{1-y}$$

olur. $y \neq 1$ için $x = \dfrac{2\,(1+y)}{1-y}$ eşitliği anlamlı olacağından

$$R_f = \{\, y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1 \,\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

olur.

d) Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 + 1 \neq 0$ olduğundan $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ her $x \in \mathbb{R}$ için anlamlıdır. $D_f = \mathbb{R}$ olur. Diğer taraftan $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ olduğundan

$0 < y = \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$ olur. $R_f = (0,\ 1]$ dir.

e) $x = 1$ için

$f(1) = \dfrac{1^2 - 1}{1 - 1} = \dfrac{0}{0}$ olur ve $\dfrac{0}{0}$ belirsiz olduğundan, $x = 1$ de $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, tanımsızdır. Yani $x \neq 1$ olan tüm x ler eşitliği anlamlı yapar. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\,1\,\}$ dir.

$f(x)$ i tekrar yazarsak $x \neq 1$ için

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)}\,(x+1)}{\cancel{x-1}} = x + 1$ dir. Böylece $x \neq 1$ için $f(x) = x + 1$ olur. $y = f(1) = 1 + 1 = 2$ olduğundan 1 e karşı gelen $y = 2$ yi $\mathbb{R}$ ‘den çıkarırsak değer kümesini buluruz. $R_f = \mathbb{R} \setminus \{\,2\,\}$ dir.

Günlük hayatımızda bir değişkenin diğer bir değişkene bağlı olarak değiştiği durumlarla sık sık karşılaşırız. Örneğin; taksi ücreti, kat edilen km ye bağlı olarak, alım satım vergisi alınan ya da satılan malın fiyatına bağlı olarak, dairenin alanı yarıçap uzunluğuna bağlı olarak, vs. ... değişir.

Genel olarak bir y değişkeninin bir x değişkenine bağlı olarak değiştiği her durum, kuralı $y = f(x)$ olan bir fonksiyon tanımlar. Böylece fonksiyonlar ya bir **tablo** ile veya **grafik** ile ya da $\boldsymbol{y = f(x)}$ **denklemi** ile verilebilir. Biz daha çok son durum ile ilgileneceğiz.

Bir fonksiyonun grafiği $y = f(x)$ eşitliğini sağlayan (x, y) ikililerinin kümesi olarak tanımlanır.

Bir $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği genellikle düzlemde bir eğridir.

AMAÇ 3

Bir fonksiyonun grafiğini çizebileceksiniz.

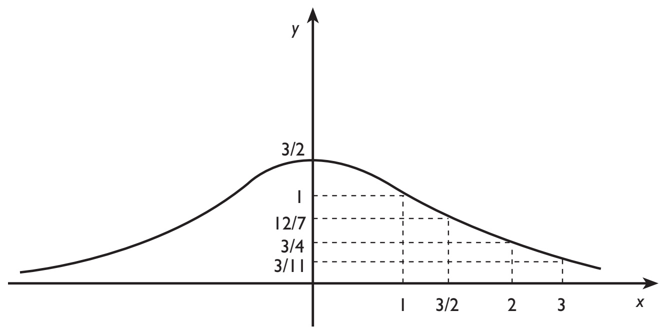
ÖRNEK 2

$f(x) = \dfrac{3}{2 + x^2}$ ***fonksiyonunun grafiğini çiziniz.***

ÇÖZÜM

Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 + 2 \neq 0$ olur ve $D_f = \mathbb{R}$ dir. Her $x \in \mathbb{R}$ için $0 < f(x) = \dfrac{3}{2 + x^2} \leq \dfrac{3}{2}$ olduğundan $R_f = (0, 3/2]$ dür. $f(-x) = f(x)$ olduğundan grafik y - eksenine göre simetriktir. Grafiği $[0, +\infty)$ aralığındaki değerler için çizelim.

x	$f(x)$
0	3/2
1	1
2	3/4
3/2	12/7
3	3/11

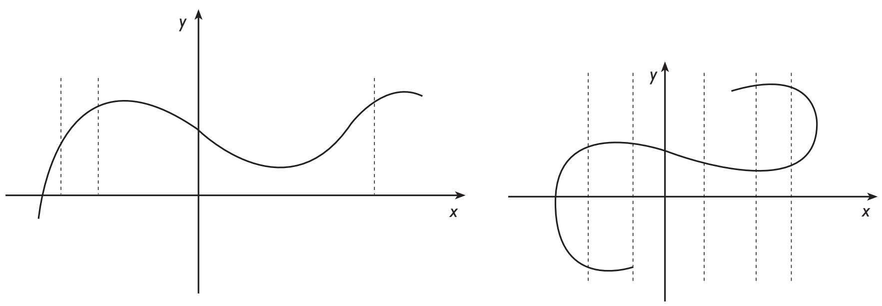


Şekil 4.4

olur.

Şimdi doğal olarak şu soru akla gelir: **Düzlemdeki her eğri bir fonksiyonun grafiği midir?** Bu sorunun yanıtı olumsuzdur. Düzlemdeki bir eğrinin, bir fonksiyonun grafiği olup olmadığı şöyle belirlenir: f nin tanım kümesindeki her noktadan y-eksenine paralel çizilen her doğru, verilen eğriyi en fazla bir noktada kesiyorsa bu eğri bir fonksiyonun grafiğidir. y-eksenine paralel çizilen bu doğrulardan en az biri grafiği iki ya da daha fazla noktada kesiyorsa, bu eğri bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği olamaz.

ÖRNEK 3



Şekil 4.5

y-eksenine paralel çizilen her doğru grafiği en fazla bir noktada keser. Eğri bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğidir.

y-eksenine paralel çizilen doğrulardan bazıları grafiği bir ya da iki noktada keser. Eğri bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği değildir.

Matematiksel Model Oluşturma

AMAÇ 4 ***Matematiksel model oluşturabileceksiniz.***

Şimdi verilen bir problemin matematiksel modelini çıkarma işlemi üzerinde duralım.

ÖRNEK 4

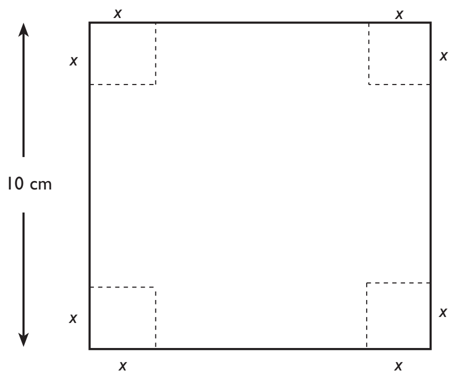
Kenar uzunluğu 10 cm olan karenin dört köşesinden x cm lik kareler çıkarılarak oluşturulan şeklin alanını y ile gösterelim.

a) y yi x in bir fonksiyonu olarak yazınız.

b) Oluşturulan $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a)



Şekil 4.6

$$y = \begin{bmatrix} \text{kenar uzunluğu} \\ \text{10 cm olan} \\ \text{karenin alanı} \end{bmatrix} - 4 \, . \begin{bmatrix} \text{Kenar uzunluğu} \\ x \text{ cm olan} \\ \text{karenin alanı} \end{bmatrix}$$

$= 100 - 4 \, . \, x^2$ olduğundan

$y = f(x) = 100 - 4x^2$ olur.

b) Probleme göre x uzunluk olduğundan sıfırdan büyüktür ve x karenin kenar uzunluğunun yarısı olan 5 cm den büyük olamaz. Bu durum x i, (0,5] aralığına kısıtlar. Oluşan şeklin alanı 0 dan büyük ve 100 cm^2 den küçük olacağı için (neden?) y ler de [0,100) arasındadır. Bu nedenle fonksiyon

$$f : (0,5] \rightarrow [0,100) \ , \ y = f(x) = 100 - 4x^2$$

ile verilmek zorundadır. O halde f nin tanım kümesi $D_f = (0,5]$ ve görüntü kümesi $R_f = [0,100)$ alınmalıdır.

ÖRNEK 5

Bir firma A malını üretmek istiyor. Firmanın piyasa araştırma bölümünce yapılan araştırmalar sonucu, q_d = talep, F= fiyat olmak üzere, talep ile fiyat arasında

$$q_d = 500\ 000 - 50\,F$$

formülü çıkarılıyor. Gelir fonksiyonunu talep cinsinden ifade ediniz.

ÇÖZÜM

R = Gelir dersek, R = Fiyat x Talep = $F.\,q_d$ olur.

$q_d = 500\ 000 - 50\,F$ verilmişti, buradan F çekilirse,

$$F = \frac{500\ 000 - q_d}{50} = 10\ 000 - \frac{q_d}{50}$$

bulunur. Böylece

$$R(q_d) = q_d \cdot \left(10\ 000 - \frac{q_d}{50}\right)$$

$$= 10\ 000 q_d - \frac{q_d^2}{50}$$

bulunur. Burada fiyat ve talep negatif olamayacağından $q_d \geq 0$ ve $10\ 000 - \frac{q_d}{50} \geq 0$ yani $0 \leq q_d \leq 500\ 000$ olur. Sonuç olarak

$$R : [0,\ 500\ 000] \longrightarrow [0,\ \infty)\ ;\ R = 10\ 000\ q_d - \frac{1}{50}\,q_d^2 \text{ dir.}$$

ÖRNEK 6

Bir firma ürettiği her bir ürünü bir yıl boyunca a TL. den satıyor. Her bir ürün için bir yıl boyunca b TL. lik hammadde gideri ve c TL. lik işçi ücreti ödeniyor. Firmanın yıllık sabit giderleri d TL. dir. x satılan ürün sayısını göstermek üzere yıllık kâr fonksiyonunu x cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM

R = Gelir C = Maliyet (Yıllık)
K = Kâr (Yıllık) olmak üzere;
Gelir = (satış fiyatı) . (satılan ürün sayısı) = ax
Maliyet = (hammadde + işçilik) (ürün sayısı) + Sabit giderler = $(b+c)\,x + d$
Kâr = Gelir - Maliyet
olduğunu düşünürsek

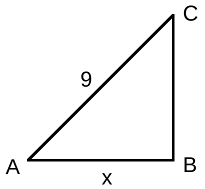
$$K(x) = R(x) - C(x)$$
$$= ax - [\,(b+c)\,x + d\,] = (a-b-c)\,x - d$$

istenen kâr fonksiyonu olur.

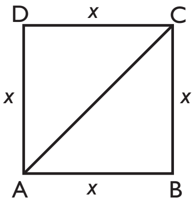
SIRA SİZDE 1

1. Boyutları 30 ve 20 olan dikdörtgen biçimli bir kartonun dört köşesinden kareler kesilerek üstü açık bir kutu oluşturulmak isteniyor. Bu kutunun hacmini veren bir fonksiyon bulunuz.

2.



Yandaki dik üçgende $f(x)$ "BC kenarının uzunluğu" ise $f(x)$ i x cinsinden ifade ediniz.

3. 

Yandaki karede
a) $f(x)$ "karenin çevresi";
b) $f(x)$ "karenin köşegeni"
c) f (x) "karenin alanı" ise $f(x)$ leri x cinsinden ifade ediniz.

4. Verilen fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ c) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ e) $f(x) = x^2 - 2x$

FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

AMAÇ 5 ***Fonksiyonların temel özelliklerini öğrenecek, bunları grafik çizimlerinde kullanabileceksiniz.***

Bu kesimde verilen fonksiyonların temel özellikleri tanımlanıp örneklerle açıklanacaktır.

$A, B \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: A \to B$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

(i) Her $x_1, x_2 \in A$ için
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ veya denk olarak $f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$ oluyorsa **f ye bire-bir (1-1) fonksiyon** denir.

(ii) Her $y \in$ B için $y = f(x)$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ varsa f ye örten fonksiyon denir. Bu durumda $f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \} = B$ olur.

(iii) $f(A) \subset B$ ise **f ye içine fonksiyon** denir.

(iv)
- Her $x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$ oluyorsa ***f* ye azalmayan (artan) fonksiyon** denir.
- $x_1 < x_2$ için $f(x_2) \leq f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$ oluyorsa **f ye artmayan (azalan) fonksiyon** denir.
- Bu koşullardan birini gerçekleyen bir fonksiyona **monoton fonksiyon** denir.

(v) Her $x \in A$ için $-x \in A$ ve
- $f(-x) = f(x)$ oluyorsa ***f* ye çift fonksiyon** denir.
- $f(-x) = -f(x)$ oluyorsa ***f* ye tek fonksiyon** denir.

(vi) Bir $T > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için $x + T \in A$ ve $f(x + T) = f(x)$ oluyorsa ***f* ye periyodik fonksiyon** denir. ***T* ye de bir periyot** denir.

$f: A \to B$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

Grafiğini çizebildiğimiz bir fonksiyonun 1-1, örten, artan, azalan, çift, tek ve/veya periyodikliği aşağıdaki biçimde araştırılabilir.

$A, B \subseteq \mathbb{R}$ ve

- *Her $y \in B$ noktasından x- eksenine paralel olarak çizilen bir doğru fonksiyonun grafiğini **en fazla bir noktada** kesiyorsa fonksiyon **bire-bir** dir.*
- *Her $y \in B$ noktasından x- eksenine paralel olarak çizilen bir doğru fonksiyonun grafiğini **en az bir noktada** kesiyorsa fonksiyon **örten** dir.*
- *x- ekseni üzerinde A nın en solundan başlayarak sağa doğru hareket edildiğinde fonksiyonun grafiği **daima yukarı doğru (aşağı doğru)** hareket ediyorsa fonksiyon **artan (azalan)** dır. **Bir aşağı bir yukarı** hareket ediyorsa grafik ne artan **ne de azalandır.***

- *Fonksiyonun grafiği* ***y- eksenine (orijine) göre simetrik*** *ise* ***fonksiyon çift (tek)*** *' tir.*
- *Fonksiyonun grafiği* ***belli aralıklar boyunca aynen tekrarlanıyorsa fonk-siyon periyodik*** *dir.*

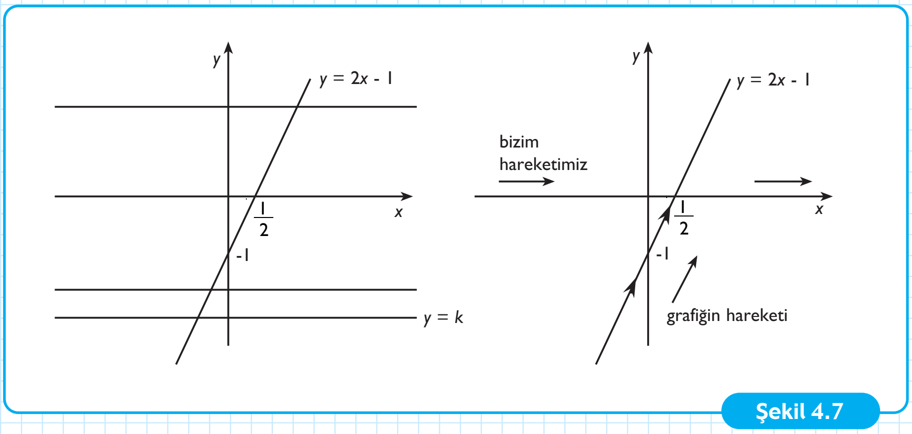
ÖRNEK 7

Verilen fonksiyonların tanımlı oldukları aralıkta bire-bir, örten, artan, azalan, tek ve/veya çift olup olmadıklarını araştırınız.

a) $y = 2x - 1$ ***b)*** $y = \frac{x^2}{2} - 2$

ÇÖZÜM

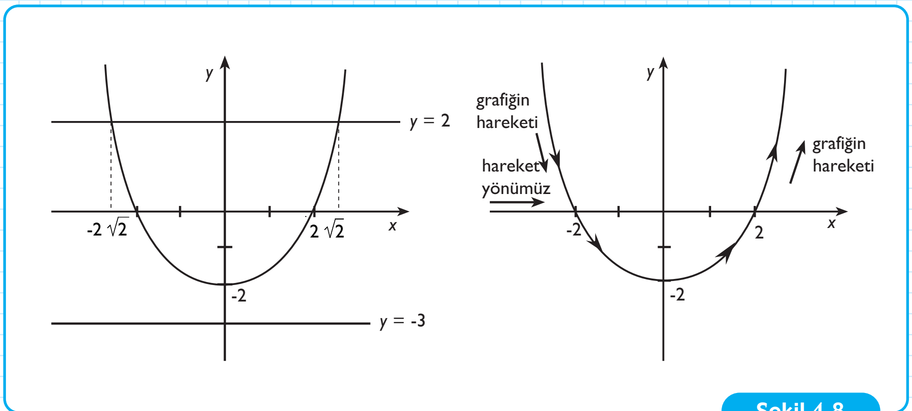
a) $y = 2x - 1$ doğrusunun grafiğini hemen çizebiliriz.



Şekil 4.7

Şekilde görüldüğü gibi x- eksenine paralel çizilen her doğru, $y = 2x - 1$ doğrusu-nu bir ve yalnız bir noktada kesiyor ve x - ekseni üzerinde soldan sağa hareket ettiğimizde grafik yukarı doğru hareket ettiğinden $y = 2x - 1$ fonksiyonu bire-bir örten ve artandır. Grafik y - eksenine ve orijine göre simetrik olmadığından tek veya çift olmaz.

b) $y = \frac{x^2}{2} - 2$ parabolünün grafiğini çizelim



Şekil 4.8

Grafikten de görüldüğü gibi $-\infty < k < -2$ olmak üzere x - eksenine paralel olan $y = k$ doğrularının hiçbiri $y = \frac{x^2}{2} - 2$ parabolünü kesmez, fonksiyon $\mathbb{R}$ ye örten değildir. Yine $-2 < k < +\infty$ olmak üzere $y = k$ doğruları grafiği her defasında iki noktada keserler. Bu $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2$ nin bire-bir olmadığını gösterir.

İkinci şekilde x - ekseni üzerinde soldan sağa hareket ettiğimizde $(-\infty, 0)$ aralığında grafik aşağı doğru hareket eder (azalandır). $(0, \infty)$ aralığında ise grafik yukarı doğru hareket eder (artandır). O halde $\mathbb{R}$ nin bütününde grafik önce azalıyor sonra artıyor. $y = \frac{x^2}{2} - 2$ fonksiyonu **ne artandır ne de azalandır.**

Son olarak grafik y - eksenine göre simetrik olduğundan $y = \frac{x^2}{2} - 2$ fonksiyonu çift fonksiyondur.

FONKSİYONLARLA YAPILAN CEBİRSEL İŞLEMLER

AMAÇ 6 *Fonksiyonlar üzerinde işlemler öğrenip uygulayabileceksiniz.*

Bu kesimde, verilen iki (ya da daha fazla) fonksiyondan yararlanarak yeni fonksiyonlar tanımlamanın değişik yollarından bahsedeceğiz.

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

olarak tanımlanır.

ÖRNEK 8

$\mathbb{R}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlanan $f(x) = 2x - 3$ ve $g(x) = x^2 + 1$ fonksiyonları verilsin.

a) $f + g$ **b)** $f - g$ **c)** $f \,.\, g$ **d)** $\frac{f}{g}$

fonksiyonlarını oluşturunuz.

ÇÖZÜM

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x - 3 + x^2 + 1 = x^2 + 2x - 2$

b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 2x - 3 - (x^2 + 1) = -x^2 + 2x - 4$

c) $(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x) = (2x - 3) \,.\, (x^2 + 1) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

d) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x - 3}{x^2 + 1}$

ÖRNEK 9

$f(x) = \frac{x}{1 - x}$ ise $\frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] = f(x^2)$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$\frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{1 - x} + \frac{-x}{1 - (-x)} = \frac{x}{\underset{(1 + x)}{1 - x}} - \frac{x}{\underset{(1 - x)}{1 + x}}\right]$$

$$= \frac{(1 + x)\,x - x(1 - x)}{2\,(1 - x^2)} = \frac{2x^2}{2\,(1 - x^2)} = f(x^2)$$

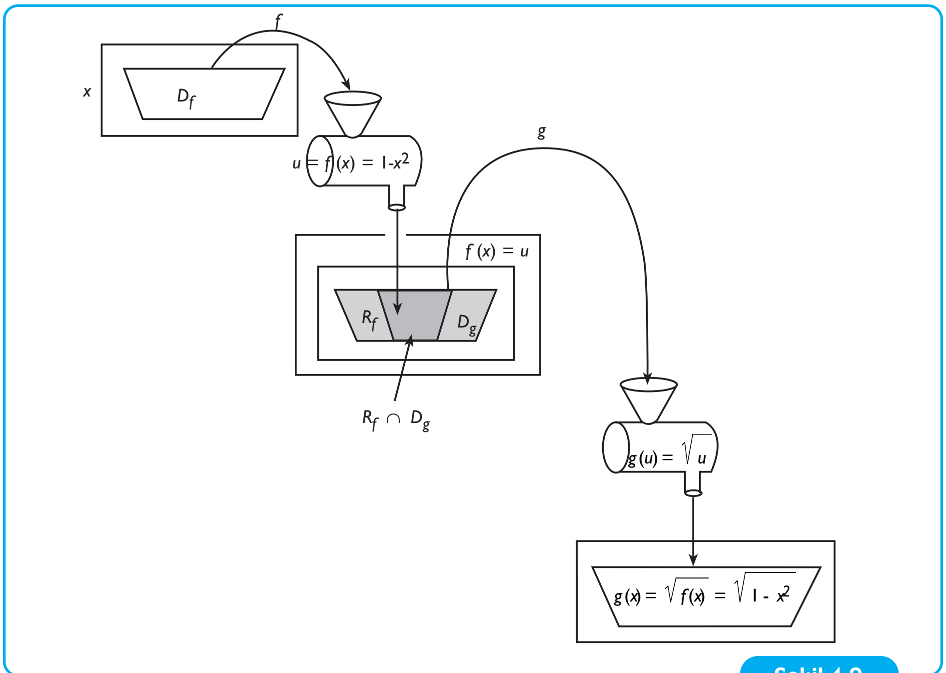
olur.

Bileşke Fonksiyon

Daha önce bir fonksiyonu bir girdi-çıktı makinesi olarak vermiştik. Çoğu zaman bir fonksiyon, bir başka fonksiyonun çıktısını girdi olarak alır ve kendi çıktısını bunu kullanarak oluşturur.

Örneğin;

$y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonunda $u = f(x) = 1 - x^2$ fonksiyonunun çıktısı olan $1 - x^2$ nin karekökü alınmaktadır. Bunu şematik olarak gösterirsek



Şekil 4.9

olacaktır.

Bunu daha iyi kavrayabilmek için fonksiyon tanımlamamızın başındaki hesap makinesi örneğine dönelim. Bir hesap makinesinin üzerindeki fonksiyon tuşlarının her biri birer fonksiyon oluşturuyordu.

$\frac{1}{x}$ tuşuna "ters alma fonksiyonu" ve $\sqrt{x}$ tuşuna da "karekök alma" fonksiyonu diyebiliriz. Önce 9 a sonra $\frac{1}{x}$ tuşuna basarsak ekranda $\frac{1}{9}$ görürüz. Arkasından direkt olarak $\sqrt{x}$ tuşuna basılırsa ekranda bu defa $\frac{1}{3}$ yer alacakdır.

Kısaca önce ters alma fonksiyonu, onun sonucuna da karekök fonksiyonunu uygularsak

$$9 \xrightarrow{\text{ters alma}} \frac{1}{9} \xrightarrow{\text{karekök alma}} \frac{1}{3} = 0.\overline{3}$$

elde edilir.

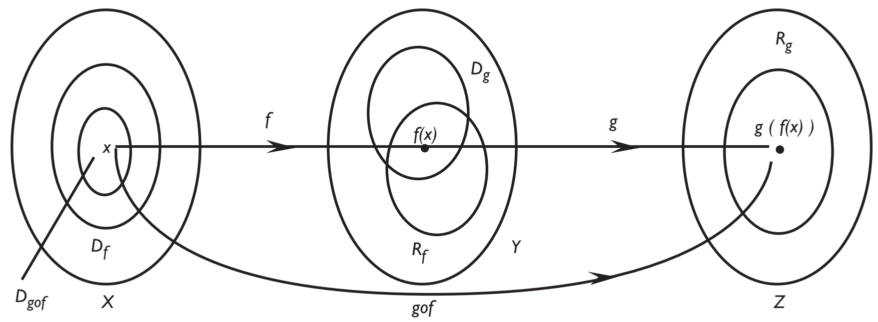
Şimdi iki fonksiyonun bileşkesini formal olarak tanımlayalım.

f ve g herhangi iki fonksiyon olsunlar. $f(x)$, g nin tanım kümesi içinde olmak üzere, f nin tanım kümesindeki her x için

$$(gof)\,(x) = g\,(\,f(x)\,)$$

olarak tanımlanan gof fonksiyonuna f ile g nin bileşke fonksiyonu denir.

Bu durumda $D_{gof} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \}$ olacağı açıktır.



Şekil 4.10

ÖRNEK 10

$f(x) = 2x - 3$ ***ve*** $g(x) = x^2 + 1$ ***fonksiyonları için fog ve gof bileşke fonksiyonlarını hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$(fog)(x) = f(g(x))$

eşitliğinin sağ yanı "***f*** **fonksiyonunda** ***x*** **gördüğün yere** $\boldsymbol{g(x)}$ **i yaz**", demektir. Buradan

$f(g(x)) = 2(g(x)) - 3 = 2 \cdot (x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 1$

elde edilir. Benzer şekilde

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 1 = (2x - 3)^2 + 1$$
$$= 4x^2 - 12x + 9 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$$

bulunur.

Bu örnekte olduğu gibi genellikle $fog \neq gof$ dir.

ÖRNEK 11

$\sqrt[3]{\dfrac{1}{1 + x^2}}$ ***ifadesini üç ayrı fonksiyonun bileşimi olarak gösteriniz.***

ÇÖZÜM

Girdiye x diyelim ve x in girdisini alalım. Önce, $1 + x^2$ çıktısını hesaplayalım, sonra çıktının çarpımsal tersini alalım. Böylece $\dfrac{1}{1 + x^2}$ elde edilir.

Son olarak çıkan sonucun küp kökünü alalım. Böylece $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1 + x^2}}$ fonksiyonu elde edilir. Buradan;

$u = f(x) = 1 + x^2$, $v = g(u) = \dfrac{1}{u}$ ve $y = h(v) = \sqrt[3]{v}$ alınırsa

$$y = h(g(f(x))) = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + x^2}}$$

olur.

ÖRNEK 12

$f(x) = x^3 + 3x + 6$, $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$ ***olmak üzere*** $g(f(2)) = ?$

ÇÖZÜM

$f(2) = 2^3 + 3 \,.\, 2 + 6 = 8 + 6 + 6 = 20$

$g(f(2)) = g(20) = \dfrac{20}{1+20} = \dfrac{20}{21}$

bulunur.

Ters Fonksiyon

AMAÇ 7

Verilen bir fonksiyonun tersinin var olup olmadığını araştıracak ve var olanların tersini bulabileceksiniz.

Bir f fonksiyonu bire-bir ise görüntü kümesindeki herhangi bir y sayısına f nin tanım kümesinden $y = f(x)$ eşitliğini sağlayan (diğer bir deyişle $y = f(x)$ denkleminin çözümü olan) bir tek x karşılık gelir. x , y tarafından tek olarak belirlendiğinden x, y nin bir fonksiyonudur. Bu durumda

$$x = f^{-1}(y)$$

yazılır ve f^{-1} fonksiyonuna **f nin ters fonksiyonu** denir.

Genellikle bir fonksiyonun tanım kümesinin değişkeni olarak y yerine x tercih edildiğinden $x = f^{-1}(y)$ eşitliğinde x ile y değiştirilip ters fonksiyon tanımı şu şekilde verilebilir.

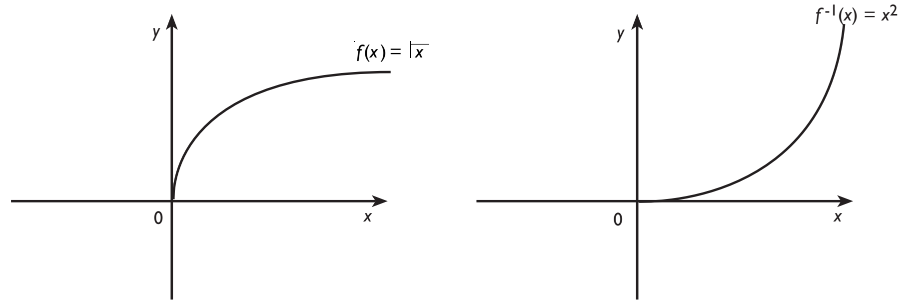
f bire-bir ise f^{-1} ters fonksiyonu vardır. $f^{-1}(x)$ in değeri f nin tanım kümesi içinde, $f(y) = x$ eşitliğini sağlayan bir tek y sayısıdır. Yani

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

dir.

Örneğin; $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, +\infty)$ dan, $[0, +\infty)$ a bire -birdir.

Tersi vardır ve bu fonksiyon $y = \sqrt{x}$ de x ile y yer değiştirilip çözülerek $x = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = f^{-1}(x) = x^2$ biçiminde bulunur. $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$ denkliğinden, bu denklemlerden biri diğerinin yerine alınabilir.Böylece bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki şekildeki gibi



Şekil 4.11

olur.

Bire-bir bir fonksiyonun terside bire-bir olacağından, tersinin de tersi vardır ve bu f ye eşittir. Gerçekten

$$y = \left(f^{-1}\right)^{-1} = f(x)$$

olur. $y = f^{-1}(x)$, $x = f(y)$ denklemlerinden biri diğerinin yerine alınabileceğinden her $y \in D_{f^{-1}}$ ve her $x \in D_f$ için

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

eşitlikleri elde edilir.

Kesin artan (ya da azalan) bir f fonksiyon bire-bir olacağından, görüntü kümesinden tanım kümesine tanımlı bir f^{-1} tersi vardır.

- *f nin tersi varsa tektir.*
- *f nin tersi bulunurken iki yol izlenir.*

1. YOL: *$y = f(x)$ den direkt olarak x çekilir. Çıkan $x = g(y)$ ifadesinde x yerine $f^{-1}(x)$, y yerine x yazılır.*

2. YOL: *$y = f(x)$ ifadesinde x ile y nin yeri değiştirilir, yani $x = f(y)$ yazılır ve bu eşitlikten y çekilir, bulunan y, $f^{-1}(x)$ i verir.*

- *Ters fonksiyonunun grafiği iki yolla çizilebilir.*

1. YOL: *f nin tersi bulunur ve onun grafiği çizilir.*

2. YOL: *f fonksiyonunun grafiği çizilir. Çizilen grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği* f^{-1} in grafiği olur.

ÖRNEK 13

Verilen fonksiyonların bire-bir olduklarını saptayınız, terslerini bulunuz ve çiziniz.

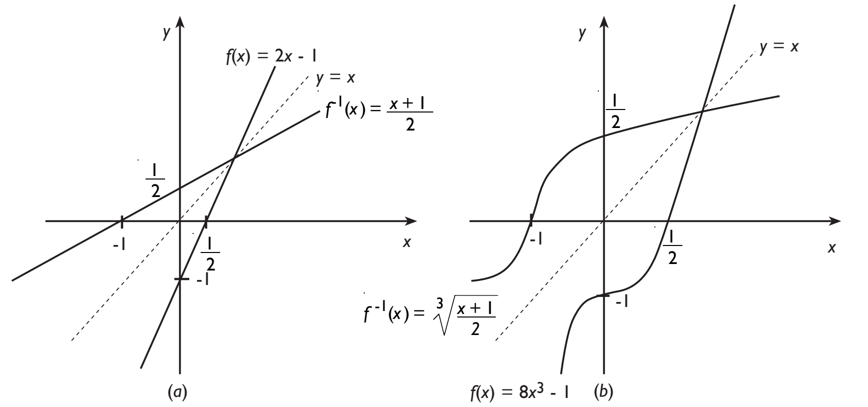
a) $f(x) = 2x - 1$ ***b)*** $f(x) = 8x^3 - 1$

ÇÖZÜM

a) $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonu monoton artan olduğundan tersi vardır. Şimdi tersini iki yolla bulalım.

1. YOL: $y = 2x - 1$ den x i çekersek $x = \dfrac{y+1}{2}$ bulunur.

x yerine $f^{-1}(x)$ ve y yerine x yazılırsa $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$ olarak bulunur.



Şekil 4.12

2. YOL: $y = 2x - 1$ de önce x ile y nin yerini değiştirelim. Bu durumda $x = 2y - 1$ elde edilir. Buradan y yi çekersek

$$x = \frac{y+1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

bulunur (Şekil (4.11 (a)).

b) $f(x) = 8x^3 - 1$ daima artan olduğundan tersi vardır.

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}$ olur (Şekil 4.11 (b)).

SIRA SİZDE 2

1. Verilen fonksiyonların bire-bir, örten, artan ve/veya azalan olup olmadıklarını araştırınız.

a) $f(x) = x^3 - x^2$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; \quad x < 0 \\ x^2 & ; \quad 0 \le x \le 2 \\ x+2 & ; \quad x > 2 \end{cases}$

d) $y = \sqrt{x^2 - x}$

2. Verilen fonksiyonlar için bileşke fonksiyonlarını bulunuz.

a) $f(x) = 3x^2 - 5x$, $g(x) = 1 - 3x$ için

(i) fog (ii) gof (iii) fof

b) $f(x) = x^3 - x$; $g(x) = \sqrt{2x-1}$

(i) fog (ii) gof

3. Verilen fonksiyonların terslerini bulunuz.

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

b) $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$; $f(x) = (x-1)^2 + 1$

c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$

4. $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = \dfrac{x+3}{x^2}$ fonksiyonları veriliyor. Aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $f(3) - g(2)$ b) $\dfrac{f(5)}{1 + g(3)}$ c) $f(t+1)$ d) $g(t)$

5. **a)** $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ ise $f(x) + f(-x) = 2\, f(-x^2)$ olduğunu gösteriniz.

b) $f(x) = x\ (x+1)$ ise $f(x+h) - f(x) = h(2x + 1 + h)$ olduğunu gösteriniz.

FONKSİYON TÜRLERİ

AMAÇ 8 *Fonksiyonları sınıflandırabileceksiniz.*

Şimdi, orta öğrenim yıllarında görmüş olduğunuz belli başlı fonksiyon türlerini ve bunların grafiklerini verelim.

I) $a_n \neq 0$ ve a_0 , a_1 , ... a_{n-1} , $a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2\, x_2 + \ldots + a_n\, x_n$$

biçimindeki bir fonksiyona **n-inci dereceden bir polinom fonksiyonu** denir.

Özel olarak

- $n = 0$ ise $f(x) = a$ fonksiyonuna **sabit fonksiyon** denir.
- $n = 1$ ise $f(x) = ax + b$ fonksiyonuna **doğrusal fonksiyon** denir. Burada $a = 1$, $b = 0$ ise $f(x) = x = I(x)$ ile gösterilir ve **birim fonksiyon** adını alır.
- $n = 2$ ise $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonuna **ikinci derece fonksiyon** denir.
- $n = 3$ ise $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonuna **kübik fonksiyon** denir.

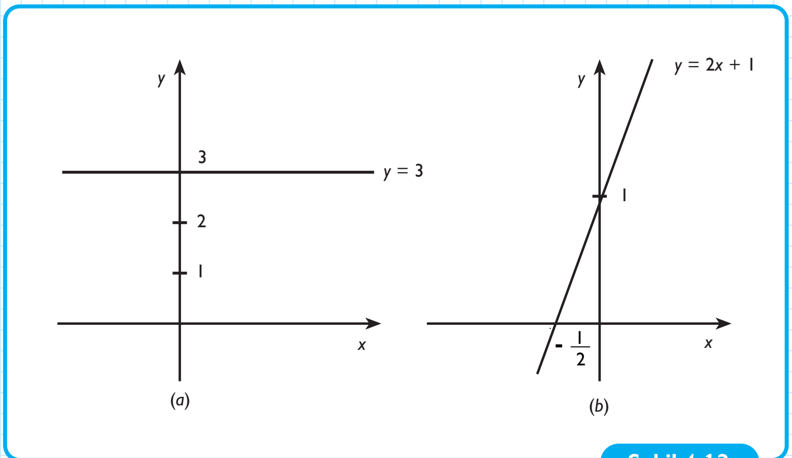
ÖRNEK 14

Verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $y = 3$ ***b)*** $y = 2x + 1$ ***c)*** $y = x^2 - x - 2$ ***d)*** $y = x^3 - x$

ÇÖZÜM

a) x - eksenine paralel olan y- eksenini 3 noktasında kesen doğrudur ((Şekil 4.13 (a))



Şekil 4.13

b) y ve x eksenlerini sırasıyla

$x = 0$ için $y = 2 \,.\, 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0,\, 1)$

$y = 0$ için $0 = 2x + 1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{2}\,,\, 0\right)$

noktalarında kesen doğrudur (Şekil 4.13 (b))

c) y ve x eksenlerini sırasıyla

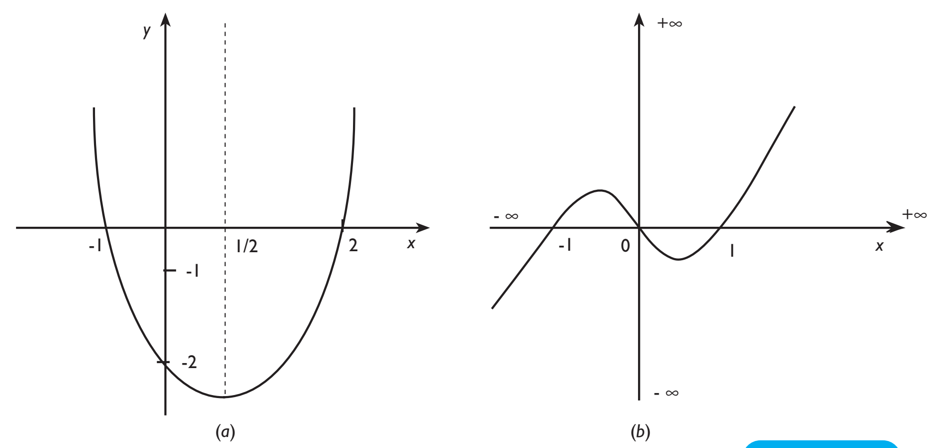
$x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (0, -2)$

$y = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$

$\Rightarrow (-1 \ , \ 0) \ , \ (2 \ , \ 0)$

noktalarında kesen simetri ekseni $x = \frac{1}{2}$ doğrusu olan bir paraboldür (Şekil 4.14 (a)).



Şekil 4.14

d) $y = 0 \Rightarrow x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1 \ , \ x_2 = 0, \ x_3 = 1$

olmak üzere x-eksenini (-1, 0), (0, 0) ve (1, 0) da kesen

$x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty$

$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$

olan bir grafiği vardır, (Şekil 4.14 (b)).

I) f ve g sırasıyla n - yinci ve m - yinci dereceden polinomlar olsunlar.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

biçiminde bir fonksiyona **rasyonel fonksiyon** denir.

ÖRNEK 15

a) $f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$ ***b)*** $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

rasyonel fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

ÇÖZÜM

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$

olduğunu daha önce görmüştük.

Eksenleri kestiği noktaları bulalım. Grafiğin y - eksenini kestiği nokta

$x = 0$ için $y = \frac{0 - 2}{0 + 2} = -1 \Rightarrow (0, -1)$

dır. x - eksenini kestiği nokta ise

$y = 0$ için $\dfrac{x-2}{x+2} = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$

olarak bulunur. Birkaç yardımcı nokta verirsek grafiği kabaca çizebiliriz.

$x = -3$ için $f(-3) = \dfrac{-3-2}{-3+2} = 5$

$x = 1$ için $f(1) = \dfrac{1-2}{1+2} = -1/3$

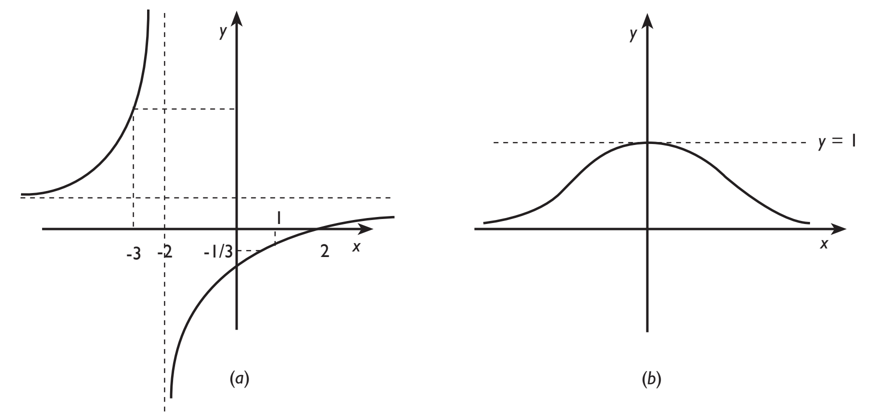
bulunur.

$x \to -\infty \Rightarrow y \to 1$

$x \to +\infty \Rightarrow y \to 1$

olur.

x	$-\infty$	-3	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	1	5	-1	-1/3	0	1



Şekil 4.15

b) $x \in R$ iken $0 < y \leq 1$ idi. Grafik x - ekseni ($y = 0$ doğrusu) ile $y = 1$ doğrusu arasındadır.

$x \to \pm\infty$ iken $y \to 0$ olacağından grafik yukarıdaki gibidir.

III) Parçalı Tanımlı Fonksiyon

Özel olarak veya zorunlu olarak bazı durumlarda fonksiyon, tek bir eşitlikle değil, tanım kümesi parçalara ayrılıp her bir parçada farklı bir eşitlikle verilebilir. Bu tür fonksiyonlara **parçalı tanımlı** ya da kısaca **parçalı fonksiyon** denir.

Günlük yaşamımızda parçalı tanımlı fonksiyonları çok sayıda örnek verebiliriz.

ÖRNEK 16

T C Posta İdaresi'nce ağırlığı 0 ile 2 kg arasında değişen mektup veya kolinin Türkiye'den İngiltere'ye gönderilme ücreti aşağıdaki fonksiyonla verilebilir (x gram y Türk Lirası olmak üzere).

$$y = f(x) = \begin{cases} 200.000 \ ; \ 0 < x < 20 \\ 300.000 \ ; \ 20 \leq x < 50 \\ 400.000 \ ; \ 50 \leq x < 100 \\ 900.000 \ ; \ 100 \leq x < 250 \\ 1.700.000 \ ; \ 250 \leq x < 500 \\ 3.000.000 \ ; \ 500 \leq x < 1000 \\ 4.700.000 \ ; \ 1000 \leq x < 2000 \end{cases}$$

- *Bulunduğunuz şehirdeki taksilerdeki taksimetre tarifini km'ye, TL. karşılık getiren parçalı fonksiyon biçiminde yazınız.*
- *Bulunduğunuz şehrin belediyesi tarafından düzenlenen m^3'e TL. karşılık getiren su fiyatları için bir parçalı fonksiyon yazınız.*

ÖRNEK 17

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \ ; \ x \leq 3 \\ x - 2 \ ; \ 3 < x \leq 4 \\ 5 - x \ ; \ x > 4 \end{cases}$$ *parçalı fonksiyonu için*

a) $f(2)$, $f\left(\frac{7}{2}\right)$, $f(6)$ *değerlerini hesaplayınız*

b) Grafiğini çiziniz.

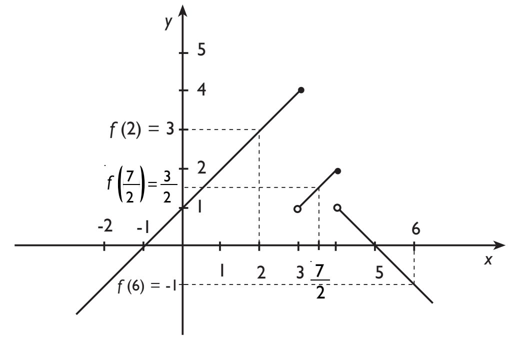
ÇÖZÜM

a) $x = 2 < 3 \Rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3$

$3 < x = \frac{7}{2} < 4 \Rightarrow f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2}$

$x = 2 > 4 \Rightarrow f(6) = 5 - 6 = -1$

b)



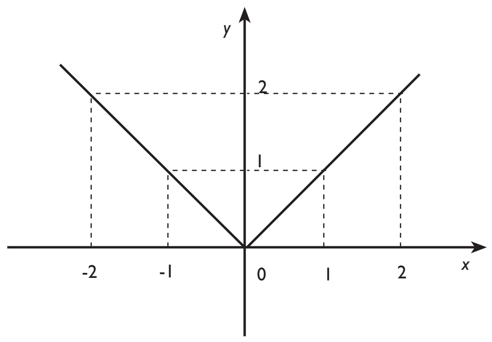
Şekil 4.16

IV) Salt (Mutlak) Değer Fonksiyonu

Bir x gerçel sayısının mutlak değerinin $|x| = \begin{cases} -x \; ; & x < 0 \\ 0 \; ; & x = 0 \\ x \; ; & x > 0 \end{cases}$ biçiminde tanımlandığını biliyoruz.

$s : \mathbb{R} \to [0, \infty) \; ; \; s(x) = \begin{cases} -x \; ; & x < 0 \\ 0 \; ; & x = 0 \\ x \; ; & x > 0 \end{cases}$ biçiminde tanımlı s fonksiyonuna salt (mutlak) değer fonksiyonu denir.

Bu fonksiyonun grafiği $x \in (-\infty, 0)$ da $s(x) = -x$; $x = 0$ için $s(x) = 0$; $x \in (0, \infty)$ için $s(x) = x$ grafikleri çizilerek aşağıdaki gibi oluşturulur.



Şekil 4.17

Ömer Hayyam (1048 - 1122)

Bir parabol ile bir çemberi kesiştirerek 3. dereceden bir polinom denklemin çözümü için geometrik bir yöntem bulmuştur.

Sevgili seninle ben pergel gibiyiz:
İki başımız var, bir tek bedenimiz.
Ne kadar dönersem döneyim çevrende:
Er geç baş başa verecek değil miyiz?
Ö. HAYYAM

"Biraz da şair olmayan bir matematikçi, hiçbir zaman tam bir matematikçi olamaz."
Karl WEIERSTRASS

Kendimizi Sınayalım

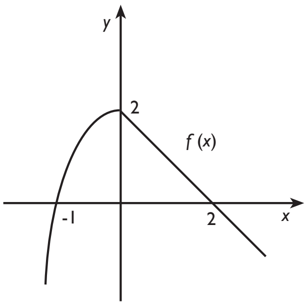
1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $[-2, 3]$
b. $[-3, 2]$
c. $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$
d. $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
e. $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

2. $f(x) = \sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 1}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$
b. $(-\infty, 3)$
c. $(-\infty, -1]$
d. $[-1, +\infty)$
e. $[3, +\infty)$

3. Verilen grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine aittir?



a. $f(x) = \begin{cases} 2 - 2x^2 & ; \ x < 0 \\ 2 - 2x & ; \ x \geq 0 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 2 - 2x^2 & ; \ x < 0 \\ 2 - x & ; \ x \geq 0 \end{cases}$

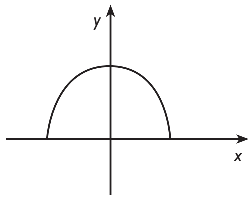
c. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & ; \ x < 0 \\ 2 - 2x & ; \ x \geq 0 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & ; \ x < 0 \\ 2 - x & ; \ x \geq 0 \end{cases}$

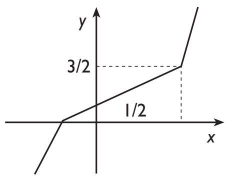
e. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & ; \ x < 0 \\ 2 - x & ; \ x \geq 0 \end{cases}$

4. Aşağıdakilerden hangisi 1-1 fonksiyondur?

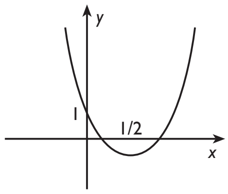
a.



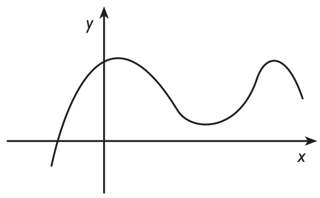
b.



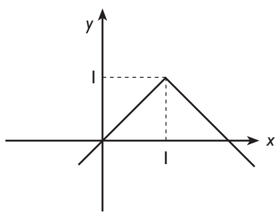
c.



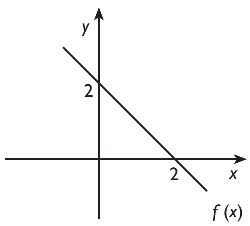
d.



e.



5. Aşağıda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?



a. $x - y = 2$
b. $y - x = 2$
c. $x + y = 2$
d. $x + y = -2$
e. $x - 2y = 2$

6. $f(3x + 1) = x - 2$ ise, $y = f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a. $y = \frac{1}{3}(x - 7)$

b. $y = \frac{x + 1}{3} + 2$

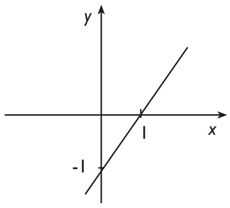
c. $y = \frac{x - 6}{3}$

d. $y = \frac{x - 5}{3}$

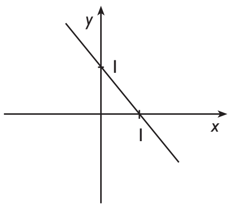
e. $y - x = 2$

7. Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangisinin grafiği tersinin grafiği ile aynıdır.

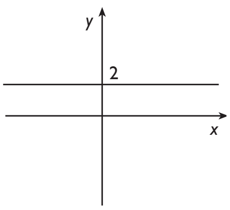
a.



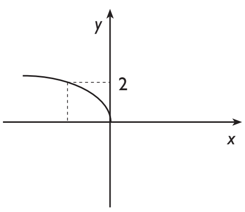
b.



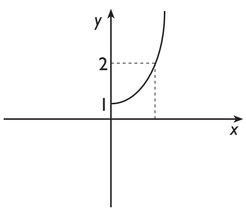
c.



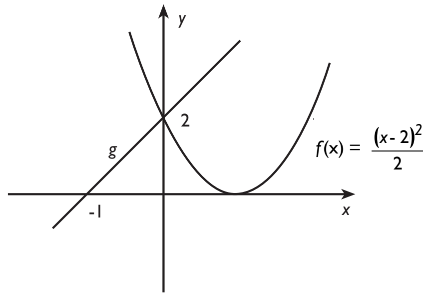
d.



e.



8.



Yukarıda $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre $y = (gof)(x)$ bileşke fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a. $y = \frac{x^2}{2}$

b. $y = \frac{(x - 2)^2}{2} + 2$

c. $y = \frac{(x + 2)^2}{2}$

d. $y = \frac{(x - 2)^2 + 2}{2}$

e. $y = (x - 2)^2 + 2$

9. $f(x) = \frac{3x - 1}{|x - 2| - 4}$ fonksiyonun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

b. $\mathbb{R} \setminus \{ -2, 2 \}$

c. $\mathbb{R} \setminus \{ -2, 6 \}$

d. $\mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$

e. $\mathbb{R} \setminus \{ 4 \}$

10. $x f(x) + 2 = x + 3f(x)$ olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\frac{x - 2}{x - 3}$

b. $\frac{x + 2}{x - 3}$

c. $\frac{-3x + 2}{-x - 1}$

d. $\frac{3x - 2}{x - 1}$

e. $\frac{3x - 2}{1 - x}$

11. $f(x) = \dfrac{(x-3)^3}{4}$ fonksiyonunun $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\sqrt[3]{4x-3}$

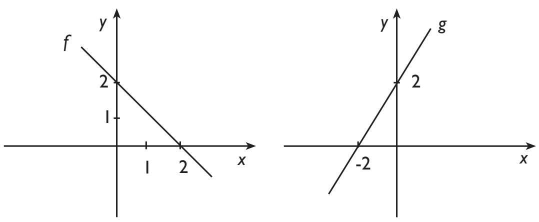
b. $3 - \sqrt[3]{4x}$

c. $\sqrt[3]{x-4} + 3$

d. $3 + \sqrt[3]{4x}$

e. $\sqrt[3]{x-7}$

12.



Yukarıda grafikleri verilen f ve g fonksiyonları için $(gof)(2)$ sayısı kaçtır?

a. -4
b. -2
c. 0
d. 2
e. 4

Biraz Daha Düşünelim

1. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4}$

b) $f(x) = \sqrt{|x| - 3}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

2. Aşağıdaki f ve g fonksiyonları için fog ve gof'i fonksiyonlarını bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$
$g(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = |x|$
$g(x) = x + 3$

3. Aşağıdaki fonksiyonların varsa ters fonksiyonlarını bulunuz.

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(2x-3) = \dfrac{x+1}{x-2}$

c) $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-5}$

d) $f(x) = 2x^3 - 1$