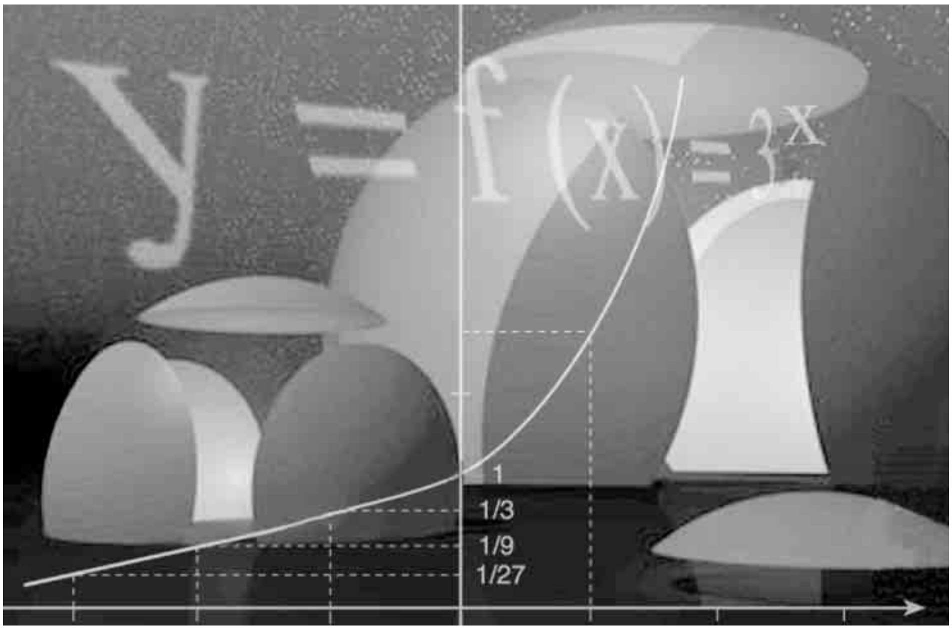
8

Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- $y = a^x$ *şeklindeki üstel fonksiyon kavramını ve üstel fonksiyonların özelliklerini öğrenecek, grafiklerini çizecek,*
- $y = a^x$ *üstel fonksiyonun ters fonksiyonu olan* $y = \log_a x$ *logaritmik fonksiyon kavramını ve logaritmik fonksiyonların özelliklerini öğrenecek, grafiklerini çizecek,*
- *logaritmanın temel özelliklerini öğrenecek,*
- *üstel ve logaritmik fonksiyonların türevlerini öğrenecek,*
- *üstel ve logaritmik fonksiyonların uygulamaları olarak bileşik faiz, nüfus artışı, ekonomik büyüme hesapları yapabileceksiniz.*

İçindekiler

DİKKAT

- ***1. ünitede verilen üslü sayılar, 4. ünitede verilen fonksiyon ve ters fonksiyon, 6. ünitede verilen türev kuralları konuları tekrar gözden geçirilmelidir.***
- ***Örnekler iyice incelenmelidir.***
- ***Alıştırmalar çözülmelidir.***

Giriş

500 milyon TL %62 yıllık faiz oranıyla 1 er aylık zaman dilimleriyle bankaya yatırıldığında, yıl sonundaki banka hesap tutarı ne olur?

Türkiyenin nüfusu 2000 yılında yaklaşık 65 milyon ve ortalama yıllık nüfus artış yüzdesi %2 olarak belirlenmişse 2025 yılında Türkiye'nin nüfusu ne kadar olacaktır?

Daha önceleri, bu türden problemlerle karşılaşmışsınızdır. Yukarıda örnekleri verilen, faiz problemlerini çözmek için uygun biçimde oluşturulan formüllerden yararlanmış olmalısınız. Şimdi ise, bunları çözmek için üstel fonksiyon kavramından yararlanacağız.

Üstel fonksiyonlar, matematikte olduğu kadar bileşik faiz, nüfus artışı, ekonomik büyüme konularındaki uygulamalarıyla önem kazanır.

ÜSTEL FONKSİYONLAR

Burada, üstel fonksiyonları tanımlayarak özelliklerini öğrenecek ve grafiklerini çizeceğiz. $y = a^x$ fonksiyonunun grafiğini $a > 1$ ve $0 < a < 1$ olmak üzere iki durumda inceleyeceğiz.

4. Ünitede $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ gibi kuvvet fonksiyonlarını inceledik.

Bu fonksiyonlarda taban değişken üs sabittir. Bu ünitede de 2^x, 3^x, $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ gibi tabanı sabit üssü değişken fonksiyonları inceleyeceğiz.

$a > 0$, $a \neq 1$ bir gerçel sayı olmak üzere

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad , \quad f(x) = a^x$$

fonksiyonuna bir **üstel fonksiyon** ve a sayısına da bu üstel fonksiyonun **tabanı** denir.

$a > 0$, $a \neq 1$ bir gerçel sayı olmak üzere $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}^+$ ya tanımlanan $f(x) = a^x$ fonksiyonuna **üstel fonksiyon** denir.

I) $y = a^x$ üstel fonksiyonunda a tabanı pozitiftir. Çünkü fonksiyon, $f(x) = (-2)^x$ gibi bir kural ile tanımlanırsa $x = \frac{1}{2}$ için fonksiyonun değeri, $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$ tanımsız olur. Bu nedenle üstel fonksiyonlarda taban daima pozitiftir.

II) $y = a^x$ üstel fonksiyonunda $a \neq 1$ dır. Çünkü $a = 1$ alınırsa her x gerçel sayısı için $1^x = 1$ olduğundan fonksiyon sabit fonksiyon olur. Bu yüzden a tabanı $a > 0$, $a \neq 1$ olarak alınmıştır. Örneğin:

$$f(x) = 2^x \quad , \quad g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad , \quad h(x) = (1000)^x \quad , \quad u(x) = \left(\frac{1}{25}\right)^x$$

birer üstel fonksiyondur.

III) a , b pozitif sayılar x , y gerçel sayılar olmak üzere, üslü çoklukların özelliklerinde olduğu gibi üstel fonksiyonlar içinde aşağıdaki özellikler sıralanabilir:

- $a^0 = 1$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

şeklinde tanımlanır.

ÖRNEK 1

$f(x) = 5^x$ üstel fonksiyonunun $x = -1$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{2}$ için aldığı değerleri bulalım:

ÇÖZÜM

$f(-1) = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

$f(0) = 5^0 = 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 5^{1/2} = \sqrt{5} \cong 2{,}236$

$f(\sqrt{2}) = 5^{\sqrt{2}} \cong 9{,}672$

ÜSTEL FONKSİYONLARIN GRAFİĞİ

Bir fonksiyonun grafiği çizilirken, tanım kümesindeki bir x değeri fonksiyonda yerine konularak karşılık gelen y değeri bulunur. Sonra, (x, y) noktası düzlemde belirlenir. Düzlemdeki bu tür noktalar birleştirilerek fonksiyonun grafiği elde edilir.

- Şimdi üstel fonksiyonun özelliklerini elde etmek için bazı fonksiyonların grafiklerini, noktasal olarak çizelim. Fonksiyonun noktasal grafiğini çizmek için x'e bazı değerler vererek bu değerlerin fonksiyon altındaki görüntülerini yani y değerlerini bulalım. Daha sonrada bulunan (x, y) ikililerine düzlemde karşılık gelen noktaları belirleyelim.

ÖRNEK 2

$y = f(x) = 3^x$ ***fonksiyonunun grafiğini çizelim.***

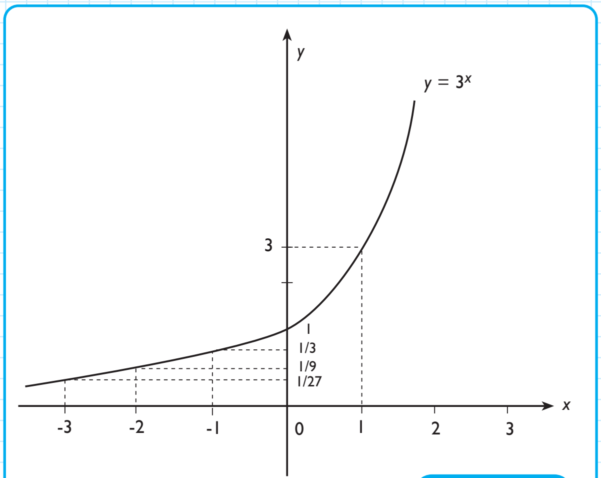
ÇÖZÜM

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 3^x$	$3^{-3} = \frac{1}{27}$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$3^{-1} = \frac{1}{3}$	$3^0 = 1$	3	$3^2 = 9$	3 = 27

Buna göre,

$$\left(-3\,,\,\frac{1}{27}\right),\ \left(-2\,,\,\frac{1}{9}\right),\ \left(-1\,,\,\frac{1}{3}\right),\ (0\,,\,1),\ (1\,,\,3),\ (2\,,\,9),\ (3\,,\,27)$$

ikilileri düzlemde belirtilerek $y = 3^x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil 8.1

ÖRNEK 3

Şimdi de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ***fonksiyonunun grafiğini çizelim:***

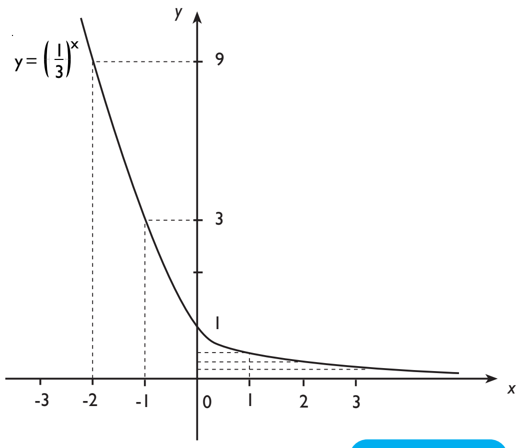
ÇÖZÜM

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 1$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{3} = \frac{1}{27}$

Buna göre,

$$\left(-3\ ,\ 27\right),\ \left(-2\ ,\ 9\right),\ \left(-1\ ,\ 3\right),\ \left(0\ ,\ 1\right),\ \left(1\ ,\ \frac{1}{3}\right),\ \left(2\ ,\ \frac{1}{9}\right),\ \left(3\ ,\ \frac{1}{27}\right)$$

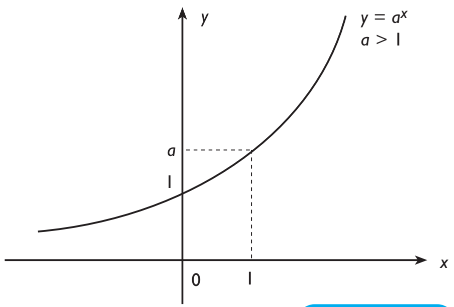
ikilileri düzlemde belirtilerek $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil 8.2

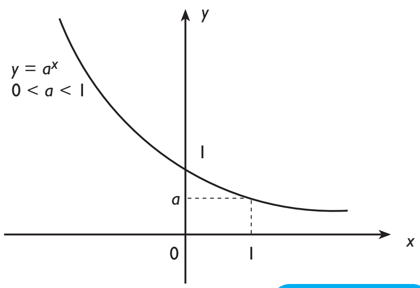
Bu iki örneğe göre, $y = 3^x$ fonksiyonunun grafiği $y = a^x$, $a > 1$ fonksiyonunun grafiğinin ve $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ fonksiyonunun grafiği de $y = a^x$, $0 < a < 1$ fonksiyonunun grafiğinin tipik birer örneğidir. Buna göre,

(i) $a > 1$ olduğunda $y = a^x$ fonksiyonunun grafiği:



Şekil 8.3

(ii) $0 < a < 1$ olduğunda $y = a^x$ fonksiyonunun grafiği:



Şekil 8.4

SIRA SİZDE 1

$y = 2^x$ ***ve*** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ***fonksiyonlarının grafiklerini de siz çiziniz.***

Üstel Fonksiyonların Temel Özellikleri

I) $y = a^x$ üstel fonksiyonu her x değeri için $a^x > 0$ dır. Yani fonksiyonun tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ için değer kümesi $(0, \infty)$ dur. Böylece fonksiyonun grafiği daima x - ekseninin üst bölgesinde kalır.

II) $y = a^x$ üstel fonksiyonunda;

$x = 0$ için $a^0 = 1$

olur. Bu nedenle fonksiyonun grafiği daima (0, 1) noktasından geçer.

III) $y = a^x$ üstel fonksiyonunda;

Bir fonksiyonda $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ ise fonksiyon azalan $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ ise fonksiyon artandır.

$0 < a < 1$ iken $x_1 < x_2$ için $a^{x_1} > a^{x_2}$ olduğundan fonksiyon daima azalandır.
$a > 1$ iken $x_1 < x_2$ için $a^{x_1} < a^{x_2}$ olduğundan fonksiyon daima artandır.

Buna göre, $y = a^x$ üstel fonksiyonu $x_1 \neq x_2$ için $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ olduğundan bire-birdir.

IV) $y = a^x$ üstel fonksiyonunda;

$a = e$ alınırsa $y = e^x$

üstel fonksiyonu elde edilir. Buradaki e sayısı irrasyonel bir sayı olup yaklaşık değeri $e \cong 2{,}71828...$ dir. Bu sayının taban olarak alınması matematiksel açıdan anlamlıdır. Bu fonksiyona eksponansiyel fonksiyon da denir ve

$\exp(x) = e^x$

ile gösterilir.

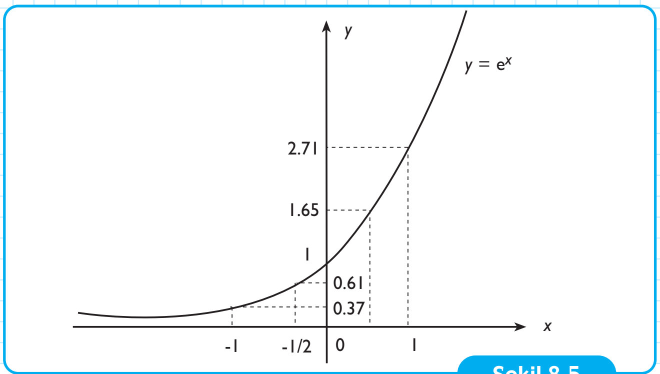
ÖRNEK 4

$y = e^x$ ***fonksiyonunun grafiğini çizelim.***

ÇÖZÜM

x	-1	-1/2	0	1/2	1
$f(x) = e^x$	$e^{-1} = \frac{1}{e} \cong 0.37$	$e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cong 0.61$	$e^0 = 1$	$e^{1/2} = \sqrt{e} \cong 1.65$	$e \cong 2.71$

Buna göre, $(-1, 0.37)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0.61\right)$, $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{2}, 1.65\right)$, $(1, 2.71)$ ikilileri düzlemde belirtilerek $y = e^x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil 8.5

LOGARİTMİK FONKSİYON

Burada, logaritma fonksiyonunu tanımlayarak, üslü ve logaritmik ifadeler arasındaki ilişkiyi öğreneceğiz.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ üstel fonksiyonu bire-bir ve örten olduğundan ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona logaritma fonksiyonu denir. Buna göre logaritma fonksiyonu,

$$\log a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \ , \quad f(x) = \log_a x \quad \text{veya} \quad y = \log_a x$$

olarak gösterilir ve **"a tabanına göre logaritma x"** olarak okunur.

Logaritma fonksiyonunun tanımına göre,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

olur. Burada pozitif bir x sayısının a tabanına göre logaritması, x'i bulmak için a sayısının yükseltilmesi gereken kuvvetini ifade eder. Örneğin, $\log_3 9$ sayısı, 9 sayısını bulmak için 3 sayısının yükseltilmesi gereken **kuvvetini** ifade eder. Bu sayı da 2 dir.

ÖRNEK 5

Aşağıdaki üslü ifadeleri logaritma biçiminde yazalım.

ÇÖZÜM

(i) $2^4 = 16$ için $\log_2 16 = 4$

(ii) $3^4 = 81$ için $\log_3 81 = 4$

(iii) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ için $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$

(iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$ için $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

ÖRNEK 6

Aşağıda verilen logaritmik ifadeleri üslü biçimde yazalım:

ÇÖZÜM

(i) $\log_2 8 = 3$ ise $2^3 = 8$

(ii) $\log_3 9 = 2$ ise $3^2 = 9$

(iii) $\log_{10} 1000 = 3$ ise $10^3 = 1000$

(iv) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ ise $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

(v) $\log_{10} 0{,}1 = -1$ ise $10^{-1} = 0{,}1$

ÖRNEK 7

Aşağıda tanımlanan fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulalım:

ÇÖZÜM

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = y = 3^x$ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonu logaritma fonksiyonudur.

$$y = 3^x \Leftrightarrow x = \log_3 y$$

Son eşitlikte x yerine y , y yerine x yazarak

$$y = \log_3 x$$

ters fonksiyon bulunur.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonu logaritma fonksiyonudur.

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{\frac{1}{3}} y$$

buradan,

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ ters fonksiyonu bulunur.

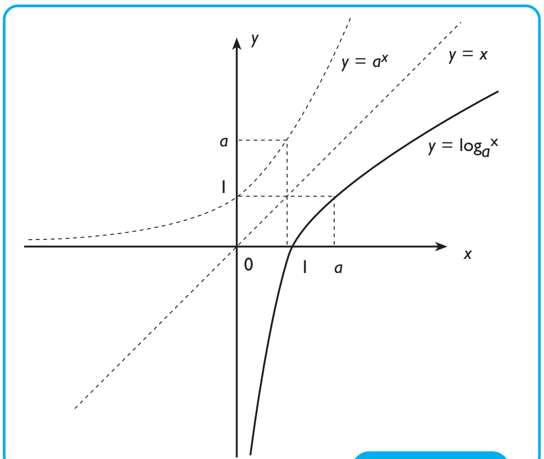
Logaritmik Fonksiyonun Grafiği

Burada $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğini $a > 1$ ve $0 < a < 1$ iken çizeceğiz.

Bir fonksiyon ile ters fonksiyonun grafiklerinin $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğunu biliyoruz. $y = \log_a x$ fonksiyonu $y = a^x$ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonu olduğundan $y = a^x$ fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğini verir. Buna göre,

(i) $a > 1$ olduğunda $y = \log_a x$ in grafiği

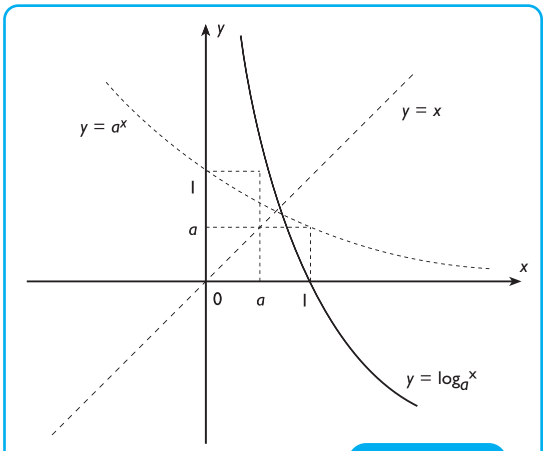
$y = a^x$ ve $y = \log_a x$ fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.



Şekil 8.6

(ii) $0 < a < 1$ olduğunda $y = \log_a x$ in grafiği

$y = a^x$ in grafiği biliniyorken, $y = \log_a x$ in grafiğini bulmak için $y = a^x$ in grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğini alırız.



Şekil 8.7

SIRA SİZDE 2

$y = 2^x$ ve $y = \log_2 x$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Şimdi bu grafiklerden yararlanarak $y = \log_a x$ fonksiyonunun özelliklerini ifade edelim:

I) Grafiklerden görüldüğü gibi $y = \log_a x$ fonksiyonu $(0 , \infty)$ aralığında tanımlı olduğundan sadece pozitif sayıların logaritmaları vardır. Negatif sayıların ve sıfırın logaritması tanımlı değildir.

II) $a > 0$, $a \neq 1$ olan her a sayısı için $a^1 = a$ olduğundan $\log_a a = 1$ dir.

Yani her pozitif a sayısının kendi tabanına göre logaritması 1 dir. Örneğin;

$\log_5 5 = 1$, $\log_{100} 100 = 1$, $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{7} = 1$

III) $a > 0$, $a \neq 1$ olan her a sayısı için $a^0 = 1$ olduğundan $\log_a 1 = 0$.

Yani her tabana göre 1 sayısının logaritması 0 dır. Buna göre logaritma fonksiyonunun grafiği $(1 , 0)$ noktasından geçer.

IV) $a > 1$ ise 1 den büyük sayıların logaritmaları pozitif, 1 den küçük sayıların logaritmaları negatiftir.

$0 < a < 1$ ise 1 den büyük sayıların logaritmaları negatif, 1 den küçük sayıların logaritmaları pozitiftir (Grafikten kontrol ediniz).

V) Üstel fonksiyon bire-bir olduğundan bunun ters fonksiyonu olan logaritma fonksiyonu da bire-bir dir. Yani $x_1 \neq x_2$ için $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$ dir.

Logaritma işlemlerine geçmeden önce logaritma için uygun bir taban seçme problemine değinelim: Logaritma, sayısal hesaplamalarda büyük kolaylık sağlar. Çünkü üslü ve köklü çokluklarda, sayıların kesirli veya irrasyonel olması durumunda işlem yapmak kolay değildir. Böyle işlemlerin hızlı ve doğru yapılmasında logaritma önem taşır. Toplama işleminin çarpmaya göre ve çarpma işleminin üs alma işlemine göre daha kolay olduğu bilinir. Logaritmada temel ilke budur. Günümüzde sayıların logaritmalarının hesaplanmasında 10 tabanına göre hazırlanmış hesap cetvelleri veya elektronik hesap makinaları kullanılır. Aslında 1 den farklı her pozitif sayı logaritmada taban olabilir. Tabanı 10 olan logaritmaya **bayağı logaritma** denir ve kısaca $\log_{10} = \log$ ile gösterilir. Kullandığımız sayı sisteminin 10 luk sistem olması nedeniyle 10 tabanına göre logaritma kullanılması yapılan işlemleri kolaylaştırır. 10 tabanına göre logaritmanın kullanışlı olmasına karşın yaklaşık değeri 2,71828... olan ve e ile gösterilen sayının taban olarak kullanılması matematiksel olarak daha anlamlıdır. Doğal sayı olmayan bu e sayısını taban alan logaritmaya **doğal logaritma** denir ve $\log_e = \ln$ ile gösterilir. Buna göre doğal logaritma fonksiyonu:

Logaritma, sayısal hesaplarda kolaylık sağlar. Toplama çarpmaya göre, çarpma üs alma işlemine göre daha kolay olması nedeniyle, logaritma hesaplamalarda kolaylık sağlar.

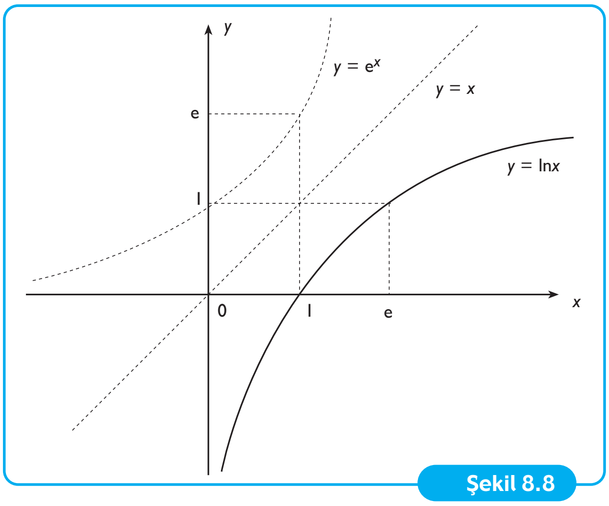
$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} , \quad f(x) = \ln x$$

dir. Bu fonksiyon $y = e^x$ üstel fonksiyonunun tersidir.

$y = e^x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $y = \ln x$ dir.

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

O halde, $y = \ln x$ fonksiyonunun grafiği $y = e^x$ fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir. $y = e^x$ ve $y = \ln x$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 8.8

Logaritmanın Temel Özellikleri

Burada logaritmanın temel özelliklerini ve bu özelliklerle ilgili problem çözümlerini öğreneceğiz.

$x\,,\ y\,,\ a\ \in\ \mathbb{R}^+\ ,\ a \neq 1$ olmak üzere

I) Bir çarpımın logaritması, çarpanların logaritmalarının toplamına eşittir.

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

Bu eşitliği kanıtlayalım. Bunun için $\log_a x = u$, $\log_a y = v$ olsun.

$x = a^u$, $y = a^v$ olur.

$x\,.\,y = a^u\,.\,a^v = a^{u+v}$ logaritmanın tanımından

$\log_a(x\,.\,y) = u + v$

$\log_a(x\,.\,y) = \log_a x + \log_a y$

elde edilir.

II) Bir bölümünün logaritması, payın logaritması ile paydanın logaritmasının farkına eşittir.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$\log_a x = u$, $\log_a y = v$ olsun.

$x = a^u$, $y = a^v$ olur.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v},$$

$\log_a \dfrac{x}{y} = u - v$, logaritmanın tanımından

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

elde edilir.

III) Bir kuvvetin logaritması, sayının logaritması ile kuvvetin çarpımına eşittir. ($n \in \mathbb{N}$).

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a x^n = \log_a \underbrace{(x.x\dots x)}_{n \text{ tane}}$$

$$= \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{n \text{ tane}}$$

$$= n \log_a x$$

elde edilir.

Özel olarak $n = -1$ ve $n = \frac{1}{r}$ için sırasıyla (r, pozitif tamsayı)

$$\log_a x^{-1} = \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

olur.

$$\log_a x^{\frac{1}{r}} = \log_a \sqrt[r]{x} = \frac{1}{r} \log_a x$$

elde edilir.

IV) Logaritmada taban değiştirme:
Bir sayının bir tabana göre logaritması biliniyorsa, bu sayının herhangi bir tabana göre logaritması bulunabilir:
Her $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$ için

$\log_a b \,.\, \log_b c = \log_a c$ dir.

$\log_a b = u$, $\log_b c = v$ olsun.
$a^u = b$, $b^v = c$ olur.
$(a^u)^v = b^v = c$
$a^{uv} = c$, logaritmanın tanımından
$\log_a c = u \,.\, v$
$\log_a c = \log_a b \,.\, \log_b c$ (1)

bulunur. Buradan, $\log_a b \neq 0$ olduğundan

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

elde edilir. Bu eşitliğe taban değiştirme kuralı denir.
(1) eşitliğinde $c = a$ alınırsa

$$\log_a a = \log_a b \,.\, \log_b a$$
$$1 = \log_a b \,.\, \log_b a$$
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

elde edilir.

ÖRNEK 8

$\log_{27}81$ ***ifadesinin değeri nedir?***

ÇÖZÜM

$$\log_{27}81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} = \frac{4}{3}$$

ÖRNEK 9

$\frac{3}{5} \cdot \frac{a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}}$ ***ifadesinin logaritmasını yazınız.***

ÇÖZÜM

$$\log\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}}\right) = \log\left(\frac{3\, a^3 b^2}{5\sqrt[3]{c}}\right)$$

logaritma kurallarını uygulayarak

$$= \log 3 + 3\log a + 2\log b - \log 5 - \frac{1}{3}\log c$$

elde edilir.

ÖRNEK 10

$3\log x + \frac{1}{4}\log y - (2\log a + 3\log b)$ ***ifadesini çarpım ve bölümün logaritması biçiminde yazınız.***

ÇÖZÜM

Logaritmanın temel özellikleri gereğince

$$\log \frac{x^3 \sqrt[4]{y}}{a^2 \cdot b^3}$$

elde edilir.

ÖRNEK 11

$f(x) = \log_3 x$ ***olduğuna göre*** $f\left(\sqrt[3]{9}\right)$ ***sayısı nedir?***

ÇÖZÜM

$$f\left(\sqrt[3]{9}\right) = \log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 3^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

ÖRNEK 12

$\log_3 2 = a$ ***ise*** $\log_2 48$ ***ifadesinin a cinsinden değeri nedir?***

ÇÖZÜM

$$\log_2 48 = \frac{\log_3 48}{\log_3 2} = \frac{\log_3(2^4 \cdot 3)}{\log_3 2} = \frac{4\log_3 2 + \log_3 3}{\log_3 2}$$

$$= \frac{4a+1}{a}$$

ÖRNEK 13

$\log \frac{25}{3} + \log \frac{9}{5} + \log \frac{1}{4} - \log \frac{3}{8}$ ***ifadesinin değeri nedir?***

ÇÖZÜM

$$\log \frac{\frac{25}{3} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \log \left(\frac{25}{3} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3}\right) = \log 10 = 1$$

ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

Burada üstel ve logaritmik fonksiyonların türevlerini öğrenecek ve bunlarla ilgili örnekler göreceksiniz.

I) $y = f(x) = e^x$ için $y' = f'(x) = e^x$ dir.

ÖRNEK 14

$y = (3x + 1) \cdot e^x$ ***fonksiyonunun türevini bulalım.***

ÇÖZÜM

$$y' = (3x+1)' \cdot e^x + (3x+1) \cdot (e^x)'$$
$$y' = 3 \cdot e^x + (3x+1) \cdot e^x$$
$$= (3x+4)\, e^x$$

II) g türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$y = f(x) = e^{g(x)}$ için $y' = f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$ dir.

ÖRNEK 15

$y = e^{x^3}$ ***fonksiyonunun türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = \left(x^3\right)' e^{x^3} = 3x^2\, e^{x^3}$$

ÖRNEK 16

$y = 12e^{3x}$ ***fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki teğetinin eğimini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Bir fonksiyonun verilen bir noktadaki teğetinin eğimi, fonksiyonun o noktadaki türevinin değerine eşit olacağından,

$$y' = f'(x) = 12 \cdot 3 \cdot e^{3x} = 36\, e^{3x}$$

$$f'(0) = 36\, e^0 = 36$$

bulunur.

III) $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$y = f(x) = a^x$ için $y' = f'(x) = a^x \,.\, \ln a$ dır.

ÖRNEK 17

$y = 3^x$ ***fonksiyonunun x = 0 noktasındaki türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$y' = f'(x) = 3^x \ln 3$

$f'(0) = 3^0 \ln 3 = \ln 3 \cong 1{,}0986$

IV) g türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$y = f(x) = a^{g(x)}$ için $y' = f'(x) = a^{g(x)}\, g'(x) \ln a$ dır.

ÖRNEK 18

$y = f(x) = 3^{x^2 - 3x}$ ***fonksiyonunun türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$y' = f'(x) = 3^{x^2 - 3x} \,.\, \left(x^2 - 3x\right)' \,.\, \ln 3 = 3^{x^2 - 3x} \,.\, \left(2x - 3\right) \,.\, \ln 3$

$= \left(2x - 3\right) \,.\, 3^{x^2 - 3x} \,.\, \ln 3$

ÖRNEK 19

$y = f(x) = x^2 \,.\, 2^{3x}$ ***fonksiyonu için $f'(1)$ sayısını bulunuz.***

ÇÖZÜM

$y' = f'(x) = (x^2)' \,.\, 2^{3x} + x^2 \,.\, (2^{3x})'$

$f'(x) = 2x \,.\, 2^{3x} + x^2 \,.\, 3 \,.\, 2^{3x} \,.\, \ln 2$

$f'(1) = 2 \,.\, 2^3 + 1 \,.\, 3 \,.\, 2^3 \,.\, \ln 2$

$= 16 + 24 \ln 2$

V) $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ olmak üzere

$y = f(x) = \log_a x$ için $y' = f'(x) = \frac{1}{x} \,.\, \log_a e$ olur.

ÖRNEK 20

$y = f(x) = \log_3 x$ ***'in türevi bulunuz.***

ÇÖZÜM

$y' = f'(x) = \frac{1}{x} \,.\, \log_3 e$

olur.

VI) g türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$y = f(x) = \log_a g(x)$ için $y' = f'(x) = \frac{(g(x))'}{g(x)} \,.\, \log_a e$ dır.

ÖRNEK 21

$y = f(x) = \log_a(2x^2 + 1)$ ***fonksiyonunun türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = \frac{(2x^2+1)'}{(2x^2+1)} \cdot \log_a e = \frac{4x}{2x^2+1} \cdot \log_a e$$

ÖRNEK 22

$y = f(x) = \log_3(x^2 + 1)$ ***fonksiyonunun türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \cdot \log_3 e = \frac{2x}{x^2+1} \cdot \log_3 e$$

ÖRNEK 23

$y = f(x) = \log_4 8x^2$ ***fonksiyonunun türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = \frac{(8x^2)'}{8x^2} \cdot \log_4 e = \frac{16x}{8x^2} \cdot \log_4 e = \frac{2}{x}\log_4 e$$

VII) $y = f(x) = \ln x$, $x > 0$ için $y' = f'(x) = \frac{1}{x}$ dir.

ÖRNEK 24

$y = f(x) = x^2 \ln x$ ***, $x > 0$ fonksiyonu için $f'(1)$ sayısını bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

ÖRNEK 25

$y = f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x+1}$ ***, $x > 0$ olmak üzere $f'(1)$ sayısını bulunuz.***

ÇÖZÜM

Bölümün türev kuralına göre,

$$y' = f'(x) = \frac{((\ln x)^2)' \cdot (x+1) - (x+1)' \cdot (\ln x)^2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \ln x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \cdot (x+1) - 1 \cdot (\ln x)^2}{(x+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{0}{4} = 0$$

VIII) g türevlenebilir pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$y = f(x) = \ln(g(x))$ fonksiyonu için $y' = f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ dir.

ÖRNEK 26

$y = f(x) = \ln (x + 5)^3$ ***fonksiyonu için $f'(1)$ sayısını bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = \frac{\left((x+5)^3\right)'}{(x+5)^3} = \frac{3(x+5)^2}{(x+5)^3} = \frac{3}{x+5}$$

$$f'(1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Burada $\ln (x + 5)^3 \neq (\ln (x + 5))^3$ olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK 27

$y = f(x) = \ln^3 (4x^2 + 1)$ ***fonksiyonunun türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = 3\ln^2\left(4x^2+1\right).\left(\frac{8x}{4x^2+1}\right)$$

$$= \frac{24x.\ \ln^2\left(4x^2+1\right)}{4x^2+1} \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK 28

$y = f(x) = 3\ e^{2x+1}$ ***fonksiyonunun ikinci türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$y' = f'(x) = 3\ .\ (2x + 1)'\ .\ e^{2x+1}$

$y' = f'(x) = 3\ .\ 2\ .\ e^{2x+1} = 6\ e^{2x+1}$

$y'' = f''(x) = 6\ .\ (2x + 1)'\ .\ e^{2x+1}$

$f''(x) = 6\ .\ 2\ .\ e^{2x+1} = 12\ .\ e^{2x+1}$

ÖRNEK 29

$y = f(x) = a^{10x}$ ***fonksiyonunun ikinci türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$y' = f'(x) = (10x)'\ .\ a^{10x}\ .\ \ln a = 10\ .\ a^{10x}\ .\ \ln a$

$\ln a$ sabit olduğu için

$y'' = f''(x) = 10\ .\ 10\ .\ a^{10x}\ .\ \ln a\ .\ \ln a$

$f''(x) = 100\ .\ a^{10x}\ .\ (\ln a)^2$

ÖRNEK 30

$y = f(x) = \log_3 6x$ ***'in ikinci türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = \frac{(6x)'}{6x} \cdot \log_3 e = \frac{1}{x} \log_3 e$$

$\log_3 e$ sabit olduğundan

$$y'' = f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \log_3 e = -\frac{1}{x^2} \cdot \log_3 e = \frac{-1}{x^2 \ln 3}$$

ÖRNEK 31

$y = f(x) = x \ln x$ ***in ikinci türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$y' = f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y'' = f''(x) = \frac{1}{x}$$

SIRA SİZDE 3

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

1. $y = x e^{-x}$	**6.** $y = \sqrt{\ln x}$
2. $y = (x^2 + 3) e^{x^5}$	**7.** $y = \ln (x^2 + x + 1)$
3. $y = e^{x^3} + x^2$	**8.** $y = a^{x^2} \cdot \ln x$
4. $y = 3^{2x^2}$	**9.** $y = \ln^3 (x^2 + 1)$
5. $y = e^{-x^2} \cdot 3^{x^3}$	**10.** $y = e^{-x^2} \ln x^2$

ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN EKONOMİDEKİ UYGULAMALARI

Şimdi, üstel ve logaritmik fonksiyonların ekonomideki uygulamalarına örnekler vereceğiz.

Üstel ve logaritmik fonksiyonlarla bileşik faiz, nüfus artışı, ekonomik büyüme gibi hesaplamalarda karşılaşırız.

Bileşik faiz, belli zaman aralığında gerçekleşen faizin, ana paraya eklenmesiyle bulunan tutarın faizidir.

P_0 = ana para,
i = faiz oranı
t = zaman (gün, ay veya yıl olarak)
P_t = ana para + faiz (t zaman süresinde)

P_t yi P_0 , i , t cinsinden bulalım.

1. zaman dilimi sonunda gerçekleşen faiz $P_0 i$ olacaktır. Böylece, 1. zaman dilimi sonunda banka hesap tutarı

$$P_1 = P_0 + P_0 i = P_0 (1+i)$$

olur.

2. zaman dilimi sonunda gerçekleşen faiz $P_1 i$ olacaktır. Böylece 2. zaman dilimi sonunda banka hesap tutarı

$$\begin{aligned} P_2 = P_1 + P_1 i &= P_1 (1+i) \\ &= P_0 (1+i)(1+i) = P_0 (1+i)^2 \end{aligned}$$

olur.

3. zaman dilimi sonunda gerçekleşen faiz $P_2 i$ dir. Böylece 3. zaman dilimi sonunda, banka hesap tutarı

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + P_2 i = P_2 (1+i) \\ &= P_0 (1+i)^2 (1+i) \\ &= P_0 (1+i)^3 \end{aligned}$$

olur.

Bu şekilde devam edilerek t zaman dilimi sonunda banka hesap tutarı

$$P_t = P_0 (1+i)^t$$

olur. Buna **bileşik faiz (efektif faiz)** formülü denir.

Burada,

$$f : N \to \mathbb{R} \;, \quad f(t) = P_0 (1+i)^t$$

fonksiyonu ortaya çıkar. $1 + i = a$ ile gösterirsek

$$f(t) = a^t P_0$$

buradaki a^t terimi, t zaman dilimi sonunda banka hesap tutarının, ana paranın kaç katı olduğunu ifade eder.

ÖRNEK 32

50 milyon TL %80 yıllık faiz oranıyla 3 er aylık zaman dilimleriyle bankaya yatırılsın. 5 yıl sonundaki banka hesap tutarını bulunuz. 5 yıl sonunda kazanılan toplam faizi hesaplayınız.

ÇÖZÜM

t zaman dilimi sonunda banka hesap tutarı

$$P_t = P_0 (1+i)^t$$

dir. Bankaya yatırılan para P_0 ve bir zaman diliminde gerçekleşen faiz oranı i sırasıyla;

$$P_0 = 50 \,.\, 10^6 \quad \text{TL}$$

$$i = \frac{\text{Yıllık faiz oranı}}{\text{Bir yıldaki zaman dilimi sayısı}} = \frac{0{,}80}{4} = 0{,}20$$

olur. Burada %80 yıllık faiz oranının 0,80 şeklinde yazılması gerektiğine dikkat ediniz. Bir yılda 3 er aylık 4 zaman dilimi olduğuna göre, 5 yıldaki zaman dilimi sayısı

$t = 4 \,.\, 5 = 20$

dir. Bu durumda 5 yıl sonunda yani, 20 tane 3 er aylık zaman dilimi sonunda bankadaki hesap tutarı:

$$P_{20} = 50 \,.\, 10^6 \, (1 + 0,20)^{20}$$
$$= 50 \,.\, 10^6 \, (1,2)^{20}$$
$$= 5 \,.\, 10^7 \,.\, (38,337) = 1916 \,.\, 10^6 \text{ TL}$$

Kazanılan toplam faiz:

$$P_{20} - P_0 = 1916 \,.\, 10^6 - 50 \,.\, 10^6$$
$$= 1866 \,.\, 10^6 \text{ TL}$$

olur.

ÖRNEK 33

Bankaya yatırılan 25 .10^6 TL, 5 yılda bileşik faiz uygulanarak 800. 10^6 TL ye ulaşıyor. Bankanın uyguladığı yıllık faiz oranı nedir?

ÇÖZÜM

Bileşik faiz formülüne göre, t zaman dilimi sonunda banka hesap tutarı

$$P_t = P_0 \, (1+i\,)^t$$

dir. Burada,

$P_0 = 25 \,.\, 10^6$, $t = 5$ yıl , $P_t = 800 \,.\, 10^6$

Buna göre, yukarıdaki eşitlikte verilenler yerine konursa,

$$800 \,.\, 10^6 = 25 \,.\, 10^6 \, (1+i\,)^5$$
$$32 = (1+i\,)^5$$
$$2^5 = (1+i\,)^5$$
$$2 = 1+i$$
$$i = 1$$

bulunur. Bu ise yıllık faiz oranının %100 olduğunu gösterir.

ÖRNEK 34

Yıllık %60 faiz oranıyla 20 . 10^6 TL, bileşik faizle bankaya yatırılıyor. Kaç yıl sonra bankadaki hesap tutarı 209 . 10^6 TL ye ulaşır.

ÇÖZÜM

$P_t = 209 \,.\, 10^6$, $P_0 = 20 \,.\, 10^6$, $i = 0.60$

değerlerini

$$P_t = P_0 \, (1+i\,)^t$$

ifadesinde yerine koyalım.

$$209\ .\ 10^6 = 20\ .\ 10^6\left(1{+}0{,}6\right)^t$$

$$209 = 20\left(1{,}6\right)^t$$

$$\frac{209}{20} = \left(1{,}6\right)^t$$

bulunur. Buradan n yıl sayısını bulmak için basit bir logaritma işlemi yeterli olacaktır.

$$t = \frac{\log 209 - \log 20}{\log 1{,}6} = \frac{2{,}3201 - 1{,}3010}{0{,}2041} \cong 5 \text{ yıl}$$

ÖRNEK 35

Bir bankaya yıllık %80 faizle yatırılan bir miktar para bileşik faiz ile 10 yıl sonra $320\ .\ 10^9$ TL ye ulaşıyor. Bankaya yatırılan parayı hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$P_t = P_0\,(1+i\,)^t$$

ifadesinde verilenleri yerine koyarak,

$$320\ .\ 10^9 = P_0\left(1 + 0{,}8\right)^{10}$$

$$320\ .\ 10^9 = P_0\left(1{,}8\right)^{10}$$

$$P_0 = \frac{32\ .\ 10^{10}}{\left(1{,}8\right)^{10}} \cong 896\ .\ 10^6 \text{ TL}$$

bulunur. 10 yıl önce bankaya yatırılan para yaklaşık 896 milyon TL dir.

ÖRNEK 36

Bir miktar para bankaya yıllık %80 faiz oranıyla birer aylık zaman dilimleri ile yatırılırsa, yıl sonunda gerçekleşecek bileşik faiz oranı nedir?

ÇÖZÜM

$t = 12$ ay olmak üzere $i = \dfrac{0{,}8}{12}$ dir.

Bileşik faiz formülüne göre,

$$P_t = P_0\left(1 + i\right)^t$$

$$P_{12} = P_0\left(1 + \frac{0{,}8}{12}\right)^{12}$$

$$P_{12} = P_0\, 2{,}17$$

bulunur. Yıl sonunda banka hesap tutarı, yatırılan paranın 2,17 katına ulaşmıştır. O halde yatırılan paranın 1,17 katı (%117) bileşik faiz oranıdır.

Üstel ve logaritmik fonksiyonların diğer bir uygulaması da nüfus artışının hesabıdır. Bununda bileşik faiz hesabından bir farkı yoktur. Belli bir zaman başlangıcında nüfus N_0 , nüfus artış yüzdesi i olsun. t zaman dilimi sonunda ulaşılan nüfus yani, başlangıçtaki nüfus + nüfus artışı, $N(t)$ olsun. Bileşik faiz hesabındaki formülü yeni duruma dönüştürürsek

$$N(t) = N_0\,(1+i)^t$$

olur.

ÖRNEK 37

Dünya nüfusu 1975 yılında yaklaşık 4 milyar ve ortalama yıllık nüfus artış yüzdesi %2 ise 2010 yılında dünya nüfusu ne kadar olacaktır?

ÇÖZÜM

$$N(t) = N_0\,(1+i)^t$$

bağıntısında

$$N_0 = 4\,.\,10^9 \quad , \quad i = 0{,}02 \qquad t = 2010 - 1975 = 35 \text{ yıl}$$

olup, buna göre

$$\begin{aligned} N(t) &= 4\,.\,10^9\,(1+0{,}02)^{35} \\ N(t) &= 4\,.\,10^9\,(1{,}02)^{35} \\ &\cong 4\,.\,10^9\,.\,2 \\ &= 8\,.\,10^9 \end{aligned}$$

olur. Yani 2010 yılında dünya nüfusu yaklaşık 8 milyara ulaşacaktır.

ÖRNEK 38

Türkiye'nin nüfusu 1998'de $60\,.\,10^6$ olarak alınırsa kaç yıl sonra nüfus iki katına çıkacaktır? Ortalama nüfus artış yüzdesini 0,02 olarak alınız.

ÇÖZÜM

$$N(t) = N_0\,(1+i)^t$$

bağıntısında

$$N(t) = 120\,.\,10^6 \quad , \quad N_0 = 60\,.\,10^6 \quad , \quad i = 0{,}02$$

değerlerini yerine koyarak,

$$\begin{aligned} 120\,.\,10^6 &= 60\,.\,10^6\,(1+0{,}02)^t \\ 2 &= (1{,}02)^t \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın logaritması alınırsa,

$$\log 2 = t\,.\,\log 1{,}02$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}02} \cong 35 \text{ yıl}$$

O halde Türkiyenin nüfusu 35 yıl sonra 2033 yılında 120 milyon olacaktır.

Kendimizi Sınayalım

1. $f(x) = e^{-x^3}$ ise $f'(1)$ değeri nedir?

a. 3e
b. $3e^{-1}$
c. $\frac{1}{3e}$
d. $\frac{-3}{e}$
e. -3

2. $f(x) = x e^x$ ise $f'(0)$ değeri nedir?

a. -1
b. 0
c. 1
d. e
e. e^2

3. $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ ise $f'(0)$ değeri nedir?

a. -1
b. 0
c. 1
d. e
e. 1 + e

4. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ ise $f'(4)$ değeri nedir?

a. $\frac{-1}{6}e^2$
b. $\frac{e^2}{4}$
c. $\frac{e^3}{4}$
d. $\frac{-1}{4}$
e. e^3

5. $f(x) = x \ln x$ fonksiyonun $x = e$ noktasındaki teğetinin eğimi aşağıdakilerden hangisidir?

a. 1 + e
b. 2
c. 1
d. 0
e. -e

6. $f(x) = 5e^{x^2 + x}$ fonksiyonunun ikinci türevi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $5e^{x^2+x}$
b. $5e^{x^2+x}(4x^2 + 4x + 3)$
c. $e^{x^2+x}.\ (2x+1)^2$
d. $e^{x^2+x}(4x^2 + 2x + 1)$
e. $5e^{x^2+x}.\ (2x+1)^2$

7. $f(x) = e^x + \ln x$ ise $f''(1)$ değeri nedir?

a. e + 1
b. e
c. e - 1
d. 0
e. -1

8. $f(x) = \sqrt{e^x}$ ise $f'(0)$ değeri nedir?

a. 0
b. 1/2
c. 1
d. 2
e. e

9. $f(x) = a^x . e^x$ ise $f'(0)$ değeri nedir?

a. $\ln a$
b. $e^x \ln a$
c. $\ln a + e^x$
d. $1 + \ln a$
e. e

10. 75 milyon TL %75 yıllık faiz oranıyla 3'er aylık zaman dilimleriyle bankaya yatırılıyor.Buna göre 1. yıl sonundaki banka hesap tutarı kaç milyon TL'dir.

a. 200
b. 158
c. 149
d. 140
e. 138

11. Bileşik faiz oranıyla bankaya yatırılan 49 milyon TL 2 yıl sonunda 81 milyon TL ye ulaştığına göre bankanın uyguladığı yıllık faiz oranı yaklaşık olarak nedir?

a. 15
b. 10
c. 28
d. 300
e. 375

12. %95 bileşik faiz oranıyla bankaya yatırılan bir miktar para 5 yıl sonunda 400 milyon TL'ye ulaştığına göre yatırılan para kaç milyon TL'dir.

a. 10
b. 12
c. 14
d. 20
e. 45

13. Türkiye'nin nüfusu 1995 yılında yaklaşık 60 milyon ve ortalama yıllık nüfus artış yüzdesi % 2 ise, 2025 yılında Türkiye'nin nüfusu yaklaşık kaç milyon olur?

a. 250
b. 108
c. 100
d. 97
e. 85