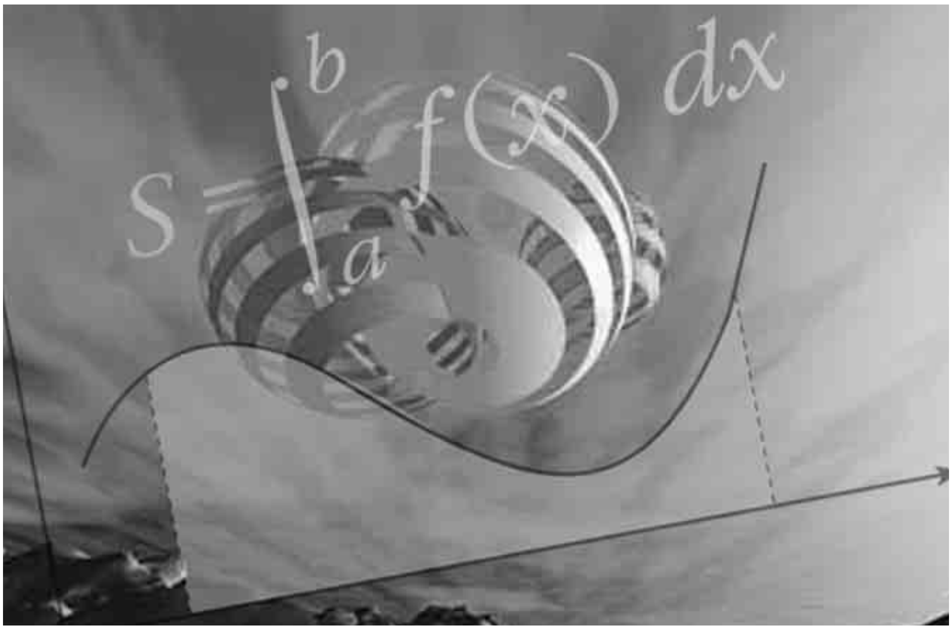
Belirli İntegral ve Uygulamaları

10



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *belirli integralin tanımını,*
- *belirli integralin alınışını,*
- *belirli integralin işletme ve ekonomik uygulamalarını öğreneceksiniz.*

İçindekiler

- *Belirli İntegral Tanımı*
- *Belirli İntegralin Uygulamaları*

DİKKAT

- ***Üniteyi çalışırken göreceğiniz gibi, bu üniteye başlamadan önce belirsiz integral kurallarını bir kere daha gözden geçirmeniz gerekmektedir.***
- ***Belirli integralin uygulamaları için de, türevle ilgili üniteleri ve belirsiz integral uygulamalarını da gözden geçirmeniz gerekmektedir.***

Giriş

Bir işletmenin, x değişkeni üretim miktarını göstermek üzere marjinal maliyet fonksiyonunu,

$$MC(x) = 2x + 3$$

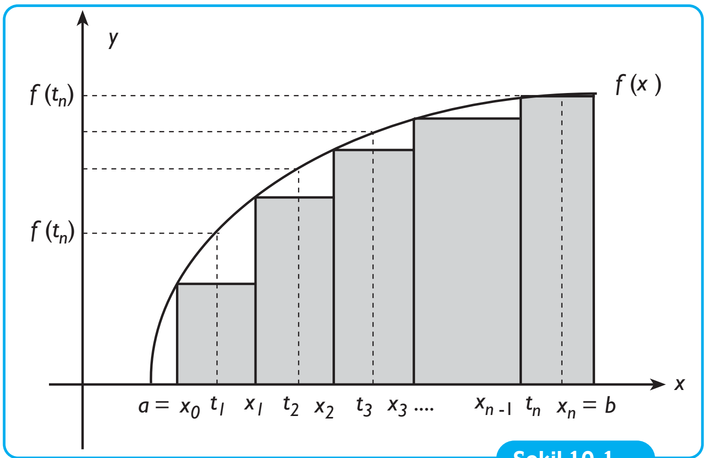
olarak belirlediğini varsayalım. Verilen marjinal maliyet fonksiyonundan yararlanarak 200 birimlik üretim için firmanın toplam maliyeti ne olur?

Vermiş olduğumuz problem ile 9. ünite girişinde verdiğimiz problem arasındaki farkı görmektesiniz. Önceki problemde marjinal maliyet fonksiyonu verilerek, toplam maliyet fonksiyonu istenmektedir. Bu problemde ise toplam maliyet fonksiyonu veriliyor, 200 birimlik üretim için toplam maliyetin ne olacağı soruluyor. Bu karşılaştırma sonucunda, belirli integral sözkonusu problemlerin çözümü için uygun bir yöntem olmaktadır.

Belirli integral, üniteyi çalışırken göreceğiniz gibi, fonksiyonu verilen bir eğri ile x ve y eksenleri arasında kalan alanların da hesaplanmasında kullanılmaktadır.

BİR EĞRİ ALTINDAKİ ALAN VE BELİRLİ İNTEGRAL TANIMI

$[a,\ b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli $f(x)$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin, $f(x) \geq 0$ olmak üzere, Şekil 10.1'de görüldüğü gibi olduğunu varsayalım.



Şekil 10.1

$[a,\ b]$ aralığını $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots\ldots x_{n-1} < x_n = b$ şeklinde uzunluğu biribirine eşit n tane alt aralığa bölelim ve herbir alt aralığın uzunluğunu Δx ile gösterelim.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

dir.

Alt aralıklar üzerinde keyfi olarak alınmış $t_1, t_2 \ldots\ldots t_n$ noktaları için fonksiyonun aldığı değerler $f(t_1), f(t_2), f(t_3) \ldots\ldots f(t_n)$ olacaktır. $f(x)$ fonksiyonunun gösterdiği eğri, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan alan, yaklaşık olarak taban uzunlukları Δx ve yükseklikleri $f(t_1), f(t_2), \ldots\ldots f(t_n)$ olan dikdörtgenlerin alanları toplamı olarak yazılabilir.

$$S \cong f(t_1)\,\Delta x + f(t_2)\,\Delta x + \ldots\ldots f(t_n)\,\Delta x$$

Bu toplam, toplam sembolü yardımiyle,

$$S \cong \sum_{k=1}^{n} f\left(t_k\right)\Delta x$$

şeklinde ifade edilebilir. Aralık sayısını gösteren n değeri $n \to \infty$ iken $\Delta x \to 0$ olacaktır. Verilen toplamın limiti, $f(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğundan, vardır. Toplamın bu limitine **belirli integral** denir ve

$$S = \lim_{k \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(t_k\right)\Delta x = \int_a^b f(x)\, dx$$

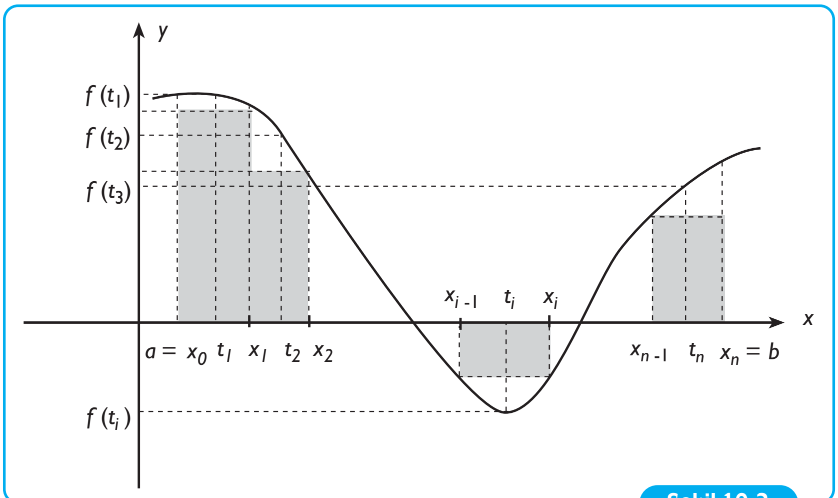
biçiminde gösterilir. $\int_a^b f(x)\, dx$ yazılışı, $f(x)$ fonksiyonunun ***a* ile *b* arasındaki integrali** diye okunur. Burada a ya integralin **alt sınırı**, b ye integralin **üst sınırı** denir.

Belirli integral fonksiyonu $f(x)$ olarak verilen eğri ile $[a, b]$ kapalı aralığında x ekseni arasında kalan alanın bulunması ile tanımlanmaktadır. Bu alan bulunurken verilen aralık n tane alt aralığa ayrılmakta, aralıkların taban olduğu dikdörtgenlerin alanlarının toplamının limiti alınmaktadır.

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde pozitif, negatif ve sıfır değerleri de alabilir. Bu durumda, yukarıda olduğu gibi keyfi $x_0, x_1 \dots x_n$ noktaları $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b$ koşulunu sağlayacak şekilde alınarak $[a, b]$ aralığı $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralıklarına bölünür. $i = 1, 2, \dots, n$ için $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$ ve $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ toplamına, **Rieamann toplamı** adı verilir. Bu toplam pozitif, negatif veya sıfır olabilen bir sayıdır. $n \to \infty$ ve $\Delta x_i \to 0$ için Rieamann toplamının limitine $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki belirli integrali denir ve bu limit,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 10.2

BELİRLİ İNTEGRALİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu kesimde, belirli ve belirsiz integral tanımlarından elde edilebilecek kimi önemli özellikler verilecektir. Bu özellikler yardımıyla, limit hesaplamasına girmeden belirli integrallerin hesaplamalarını yapacağız.

a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

b) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

c) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

d) $a \le c \le b$ için $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

e) **İntegral hesabın birinci temel teoremi:** $f(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $a < x < b$ ise,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

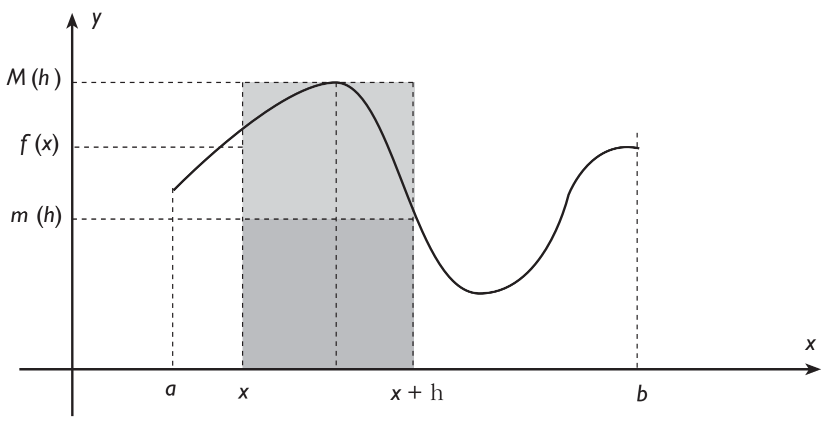
olarak tanımlanan $F(x)$ fonksiyonu türevlenebilir ve $F'(x) = f(x)$ dir.

f) **İntegral hesabın ikinci temel teoremi:** $F(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $F(x)$ de türevi $f(x)$ olan bir fonksiyon (yani $F'(x) = f(x)$) ise,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dir.

Bu özelliklerden son ikisi üzerinde kısaca duralım: $f(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon, $x \in (a, b)$ ve $h > 0$ olsun. Kolaylık için $f(x)$ in grafiğini şekilde olduğu gibi kabul edelim.



Şekil 10.3

$[x, x + h]$ aralığı içinde $f(x)$ in aldığı en büyük değer $M(h)$, en küçük değer $m(h)$ olsun. Tabanı h ve yüksekliği $M(h)$ olan büyük dikdörtgenin alanı $h \cdot M(h)$, tabanı h ve yüksekliği $m(h)$ olan küçük dikdörtgenin alanı $h \cdot m(h)$, $f(x)$ in grafiği altında ve $[x, x + h]$ aralığı üstünde kalan bölgenin alanı $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ olduğundan, bu alanlar arasında

$$h m(h) \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq h M(h) \qquad (1)$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer taraftan $x \leq c \leq x + h$ olmak üzere, $F(x)$ fonksiyonunun tanımlanışına göre,

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \int_c^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^{c} f(t)\,dt = \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^{x} f(t)\,dt = F(x+h) - F(x)$$

olduğundan (1) eşitsizliğinden

$$m(h) \le \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \le M(h)$$

eşitsizliği elde edilir. $h \to 0$ iken $m(h) \to f(x)$ ve $M(h) \to f(x)$ olduğundan

$$f(x) \le \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \le f(x)$$

veya buradan

$$F'(x) = f(x)$$

elde edilir. Böylece integral hesabın birinci temel teoremi, yani (e) özelliği kanıtlanmış olur.

Bu teorem, integral ile türev arasındaki önemli ilişkiyi verir. Bu ilişki sayılar için "kare alma" ile "karekök alma" arasındaki ilişkiye benzemektedir. Eğer pozitif bir sayının karesini alırsanız, elde edilen sayının karekökü başlangıçtaki sayıdır. Benzer olarak, sürekli bir $f(x)$ fonksiyonunun $\int_a^x f(t)\,dt$ ile tanımlanan ilkeli (belirsiz integrali) olan $F(x)$ fonksiyonunun türevi $f(x)$ dir.

İntegral hesabın ikinci temel teoremine gelince: $f(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $F(x)$ de $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. $a \le x \le b$ için birinci temel teoreme göre,

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

olarak tanımlanan $A(x)$ fonksiyonunun türevi $f(x)$ dir. Böylece $F'(x) = f(x)$ ve $A'(x) = f(x)$ olduğundan $F(x)$ ile $A(x)$ fonksiyonları birbirlerinden bir sabit kadar farklıdırlar, yani öyle bir c sabiti vardır ki,

$$A(x) - F(x) = c \quad \text{veya} \quad A(x) = F(x) + c$$

dir. Bu eşitlikte sırasıyla $x = a$, $x = b$ yazalım. $x = a$ için

$$A(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \text{, yani } A(a) = F(a) + c = 0 \text{ veya } c = -F(a)$$

olur. Buradan, $x = b$ için

$$A(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) + c = F(b) - F(a)$$

veya kısaca

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

sonucuna ulaşılır. Bazen $F(b) - F(a)$ farkı yerine $\left[F(x)\right]\Big|_{x=a}^{x=b}$ gösterimi de kullanılır; Başka bir ifadeyle,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(x)\right]\Big|_{x=a}^{x=b}$$

olur. Bu formül bize ilkeli bilinen bir fonksiyonun belirli integralinin kolayca hesaplanabileceğini gösterir.

ÖRNEK 1

$$\int_{-2}^{2}(2x + x^2)\,dx = \left[x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(4 + \frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{3}$$

ÖRNEK 2

$$\int_1^e (\ln|x|)^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{\ln^3|x|}{3}\right]_1^e = \frac{1}{3}$$

ÖRNEK 3

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \left[\ln|x|\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

ÖRNEK 4

$$\int_0^2 e^{x^2 - 2x}(x-1)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2-2x}\right]_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

ÖRNEK 5

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \int_1^4 x^{1/2}\,dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\cdot 4 \cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{14}{3}$$

ÖRNEK 6

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{8}} \frac{3x\,dx}{\sqrt{1+3x^2}}$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Değişken dönüşümü yöntemi uygulanacaktır.

$$u = 1 + 3x^2 \Rightarrow du = 6x\,dx$$

$$dx = \frac{du}{6x}$$

Burada belirli integralin limitleri de yeni değişkene göre belirlenecektir.

$x = 0$ için $u = 1 + 3x^2 = 1 + 3 \cdot 0 = 1$

$x = \sqrt{8}$ için $u = 1 + 3 \cdot (\sqrt{8})^2 = 1 + 3 \cdot 8 = 25$

Verilen kuralın uygulamaları örneklerle verilmiştir. Değişkeni dönüştürürken ne şekilde bir işlem yapılacağı belirsiz integral ünitesinde açıklanmıştır.

Belirli integral hesaplanırken değişken dönüştürülürse, integralin limitlerinin de yeni değişkene göre dönüştürülmesi gerekir..

$$\int_0^{\sqrt{8}} \frac{3x\,dx}{\sqrt{1+3x^2}} = \frac{1}{2}\int_1^{25} \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{25} u^{-\frac{1}{2}}\,du = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^{25} = \left[\sqrt{u}\right]_1^{25} = 5-1 = 4$$

ÖRNEK 7

$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ ***belirli integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Bu integralin hesaplanabilmesi için değişken dönüşümü yöntemi uygulanacaktır.

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$x\,du = dx$$

$x = 1$ için $u = \ln 1 = 0$

$x = e$ için $u = \ln e = 1$

$$\int_1^e \frac{\ln x\,dx}{x} = \int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

ÖRNEK 8

$\int_{-3}^{1} \sqrt{1-x}\,dx$ ***belirli integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Bu integralin hesaplanabilmesi için de değişken dönüşümü yöntemi uygulanacaktır.

$$u = 1-x \quad \Rightarrow \quad du = -\,dx$$

$x = -3$ için $u = 1-x = 1+3 = 4$

$x = 1$ için $u = 1-x = 1-1 = 0$

$$\int_{-3}^{1} \sqrt{1-x}\,dx = -\int_4^0 \sqrt{u}\,du = \int_0^4 \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

Aşağıdaki örneklerde belirli integalin işletme ve ekonomideki uygulamalarını bulacaksınız.

ÖRNEK 9

Türkiye'de yayınlanan bir gazetenin, t değişkeni yılları göstermek üzere, satışlarının artışı,

$$S(t) = 100\,e^t$$

fonksiyonu ile belirlenmiştir. İlk 10 yıl içinde bu gazetenin toplam satışı ne olur?

ÇÖZÜM

Gazetenin ilk 10 yıldaki toplam satışını bulmak için $t_1 = 0$, $t_2 = 10$ limitleri arasında verilen fonksiyonunun belirli integral alınmalıdır.

$$\int_0^{10} 100\,e^t\,dt = 100\int_0^{10} e^t\,dt = 100\left[e^t\right]_0^{10} = 100\left(e^{10} - 1\right) \cong 2202546$$

olur ($e^{10} \cong 22026{,}46$ olarak alınmıştır).

ÖRNEK 10

t değişkeni ay olarak zamanı göstermek üzere, bir işletmenin aylar itibariyle satışları,

$$S(t) = 30\sqrt{t} + 100$$

fonksiyonu ile belirlenmiştir. Bu işletmenin ilk 4 aydaki satışları toplamı nedir?

ÇÖZÜM

$$\text{Satışlar toplamı} = \int_0^4 \left(30\sqrt{t} + 100\right) dt$$

$$= \int_0^4 \left(30\,t^{1/2} + 100\right) dt = \left[20\,t\sqrt{t} + 100\,t\right]_0^4 = 20\,.\,4\,.\,\sqrt{4} + 400$$

$$= 160 + 400 = 560$$

ÖRNEK 11

Bir firmada, x satış miktarını göstermek üzere, marjinal gelir fonksiyonu,

$$R'(x) = -\,0{,}02x + 100$$

olarak belirlenmiştir. Buna göre;
a) 100 birimlik satış için toplam gelir ne olur?
b) 10 ile 50 birim arasında yapılan satışlar için toplam gelir ne olur?

ÇÖZÜM

a) $R(x) = \int_0^{100} \left(-\,0{,}02x + 100\right) dx$

$$= \left[-\,0{,}01x^2 + 100x\right]_0^{100} = -\,0{,}01\,.\,(100)^2 + 100\,.\,100$$

$$= -\,100 + 10.000 = 9900 \text{ birim}$$

b) $R(x) = \int_{10}^{50} \left(-\,0{,}02x + 100\right) dx = \left[-\,0{,}01x^2 + 100x\right]_{10}^{50} = 3976$ birim

ÖRNEK 12

Bir firmanın, x üretim miktarı olmak üzere, marjinal gelir fonksiyonu,

$$MG = f(x) = 20$$

olarak belirlenmiştir. Buna göre;

a) 500 birimlik üretim için toplam gelir ne olur?

b) 200 ve 1000 birimlik arasında üretim için toplam gelir ne olur?

ÇÖZÜM

a) $\int_0^{500} 20\ dx = \left[20x\right]_0^{500} = 20\ .\ 500 = 10\ 000$ birim

b) $\int_{200}^{1000} 20\ dx = \left[20x\right]_{200}^{1000} = 16\ 000$ birim

SIRA SİZDE 1

Bu sorulara kolayca yanıt verebilmeniz için belirsiz integral kurallarını yeniden gözden geçiriniz.

Aşağıda verilen belirli integralleri hesaplayınız.

1. $\int_0^1 e^x\, dx$

2. $\int_0^3 \left(3x^2 - 4x\right) dx$

3. $\int_0^2 \left(4x^3 - 9x^2\right) dx$

4. $\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2+1}\ .\ x\, dx$

5. $\int_1^e \frac{(\ln|\ x\ |)\ dx}{x}$

6. $\int_0^3 \left(x^3 + 3x\right)^{1/2} \left(x^2+1\right) dx$

7. $\int_0^3 \left(3x^2 + 9\right)^{1/2} .\ x\, dx$

8. $\int_1^2 \left((\sqrt{x}) + \sqrt{x-1}\ \right) dx$

9. $\int_{-1}^0 (2x-1)^3\, dx$

10. Bir firmada, x üretim miktarını göstermek üzere, marjinal gelir fonksiyonu, $MG = 10x$ olarak belirlenmiştir. Bu firmanın 20 birim üretim yaptığında toplam geliri kaç birim olur?

11. Bir firmanın, x değişkeni yılları göstermek üzere, satışlarının artışı, $S(x) = 9x^2$ fonksiyonu ile belirlenmiştir. İlk 3 yıl içinde bu firmanın satışları kaç birim olur?

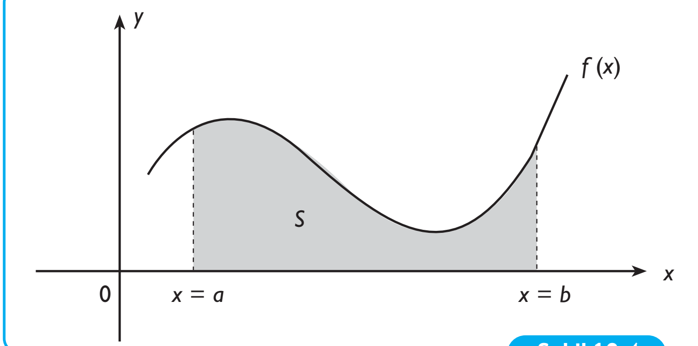
12. Bir ülkede, t değişkeni yılları göstermek üzere, nüfus $S(t) = e^{2t}$ fonksiyonu ile verilmiştir. Bu ülkede ilk 10 yıl içinde nüfus kaç birim artar?

BELİRLİ İNTEGRALİN ALAN HESAPLARINA UYGULANMASI

Belirli integrali tanımlarken bir $f(x) \geq 0$ fonksiyonunun gösterdiği eğri ve $x = a$, $x = b$ doğrulariyle x ekseni arasında kalan alanın,

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

belirli integraliyle ifade edilebileceği açıklanmıştı.



Şekil 10.4

Bir $f(x) \geq 0$ fonksiyonunun gösterdiği eğri ile $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni arasındaki alan,

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

belirli integrali ile bulunur.
Eğer $f(x) \leq 0$ ise, fonksiyonunun gösterdiği eğri ile x ekseni arasındaki alan

$$S = -\int_a^b f(x)\, dx$$

belirli integrali ile hesaplanır.

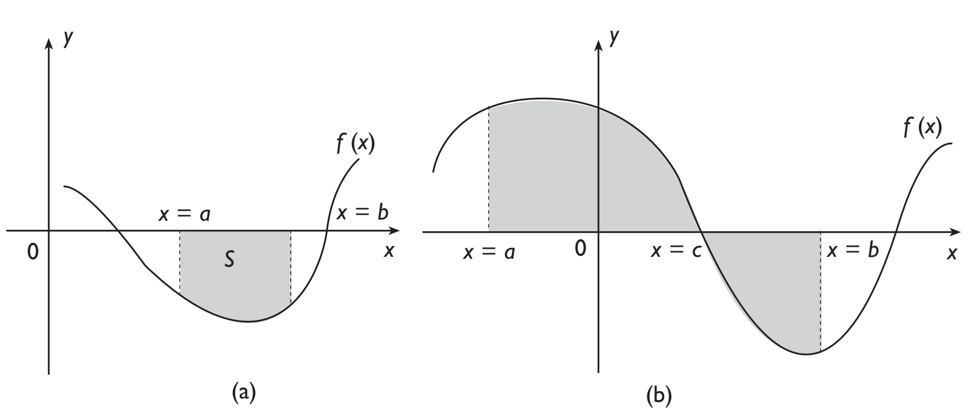
Eğer $f(x)$ fonksiyonunun gösterdiği eğri ile $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan alan aşağıda Şekil 10.5 (a)'da görüldüğü gibi bütünüyle x ekseninin altında kalıyorsa, alan,

$$S = -\int_a^b f(x)\, dx$$

belirli integrali ile bulunur. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında hem pozitif hem de negatif değerler alıyorsa, istenilen alan

$$S = \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^b f(x)\, dx$$

integraliyle hesaplanır [Şekil 10.5 (b)].



Şekil 10.5

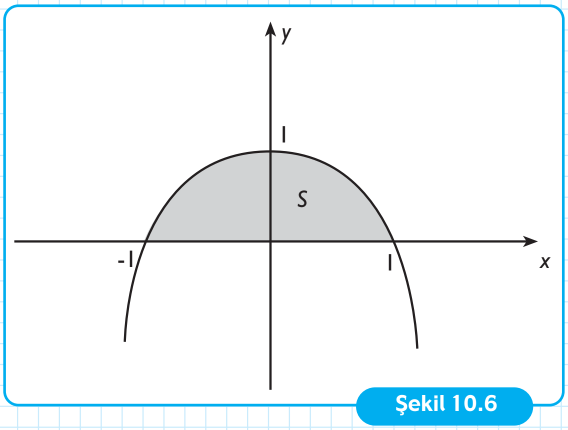
ÖRNEK 13

$f(x) = 1 - x^2$ fonksiyonunun gösterdiği eğri ile x ekseni arasındaki kalan alanı hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Bu gibi örnekleri çözerken, önce verilen fonksiyonun grafiğini çizmemiz gerekir. Bu gibi çizimlerin ne şekilde yapılacağı türevle ilgili ünitelerde açıklanmıştır.

Verilen fonksiyonunun gösterdiği eğri aşağıda Şekil 10.6'da gösterilmiştir.



Şekil 10.6

Şekilde taralı olarak gösterilen alanı belirli integral yardımıyle bulacağız.

$$S = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ br}^2$$

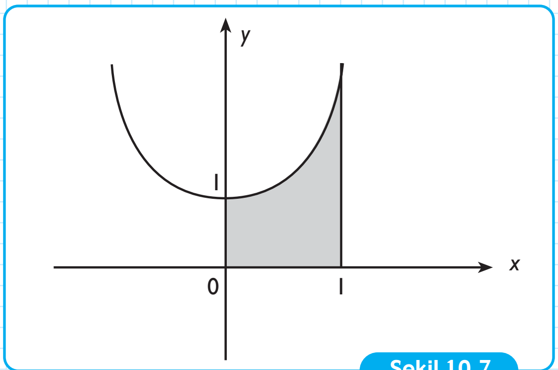
ÖRNEK 14

$f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun gösterdiği eğri $x = 0$, $x = 1$ doğruları ve x ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

ÇÖZÜM

$x = 0$ doğrusunun y ekseni olduğunu hatırlayınız.

Alan bulma problemlerinde önce verilen fonksiyonun grafiğinin çizilmesi uygun olur. $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun gösterdiği eğri ile istenilen alan taralı olarak aşağıda Şekil 10.7 de gösterilmiştir.



Şekil 10.7

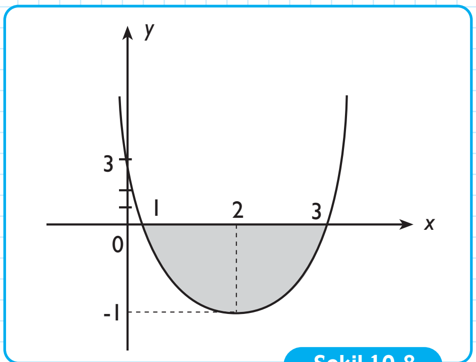
$$S = \int_{0}^{1} (x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \text{ br}^2$$

ÖRNEK 15

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ ***fonksiyonunun gösterdiği eğri ile $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ noktaları ve x ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Bildiğiniz gibi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonu çizildiğinde bir parabol belirtir. Bu parabolün tepe noktası $T(2, -1)$ dir. $f(x)$ fonksiyonunun gösterdiği eğri ile bulunması istenen alan aşağıda Şekil 10.8 de gösterilmiştir.



Şekil 10.8

Şekilden görüldüğü gibi istenilen alan x ekseninin altında kalmaktadır.

$$S = -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3 = -\left[(9 - 18 + 9) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right)\right]$$

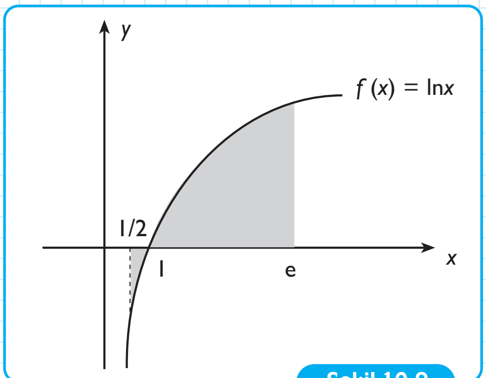
$$= \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\ \text{br}^2$$

ÖRNEK 16

$f(x) = \ln x$ ***fonksiyonunun gösterdiği eğri*** $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = e$ ***doğruları ve x ekseni arasında kalan alanı bulunuz.***

ÇÖZÜM

$f(x) = \ln x$ fonksiyonunun gösterdiği eğri ile sınırlanan bulunması istenilen alan taralı olarak aşağıdaki gösterilmiştir.



Şekil 10.9

Şekilde görüldüğü gibi, bulunması istenilen alanın bir kısmı x-ekseni altında, bir kısmı ise x ekseninin üstünde kalmaktadır. O halde bulunması istenilen alan iki belirli integralin toplanmasiyle bulunacaktır.

$$S = -\int_{1/2}^{1} \ln x \, dx + \int_{1}^{e} \ln x \, dx$$

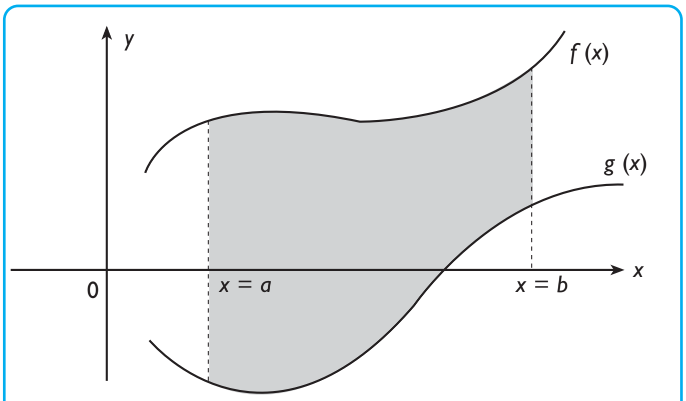
Bu integralin alınması kısmi integrasyon yöntemi ile yapılacaktır.

$$S = -\left[x\ln x - x\right]_{1/2}^{1} + \left[x\ln x - x\right]_{1}^{e}$$

$$= -\left[(1 \,.\, \ln 1 - 1) - \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] + \left[(e \ln e - e) - (1 \,.\, \ln 1 - 1)\right]$$

$$= -\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right] + 1 = \frac{1}{2}(3 - \ln 2)\ \text{br}^2$$

Belirli integral iki eğri arasındaki alanın bulunması için de kullanılır. Şimdi $f(x)$ ve $g(x)$ şeklinde verilmiş iki fonksiyonun gösterdiği eğriler ile $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan alan aşağıdaki Şekil 10.10 da görüldüğü gibi olsun.



Şekil 10.10

$f(x)$ ve $g(x)$ gibi verilen herhangi iki fonksiyonun gösterdiği eğriler ile $x=a$, $x=b$ doğruları arasında kalan alan,

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

belirli integralinin yardımıyla hesaplanacaktır.

Şekilde görüldüğü gibi $f(x) \geq g(x)$ olarak verilmiştir. Taralı alan,

$$S = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

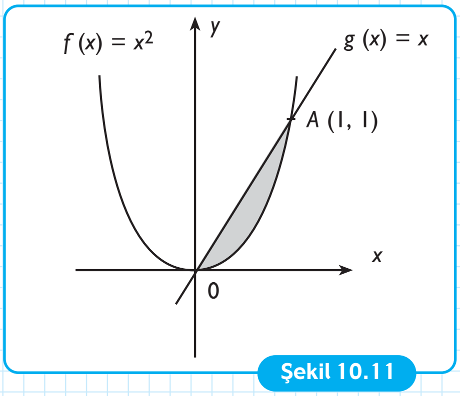
belirli integrali yardımiyle bulunur.

ÖRNEK 17

$f(x) = x^2$ ve $g(x) = x$ ***fonksiyonlarının gösterdikleri eğriler arasında kalan alan nedir?***

ÇÖZÜM

Önce verilen fonksiyonların grafiklerini çizelim. $f(x) = x^2$ fonksiyonu tepesi başlangıç noktasında olan bir paraboldür. $g(x) = x$ ise birinci açıortayını göstermektedir.



Şekil 10.11

Bu iki fonksiyonun grafikleri 0(0,0) ve $A\,(1,\ 1)$ noktalarında kesişirler. Burada şekilde görülen taralı alanın hesaplanması istenmektedir.

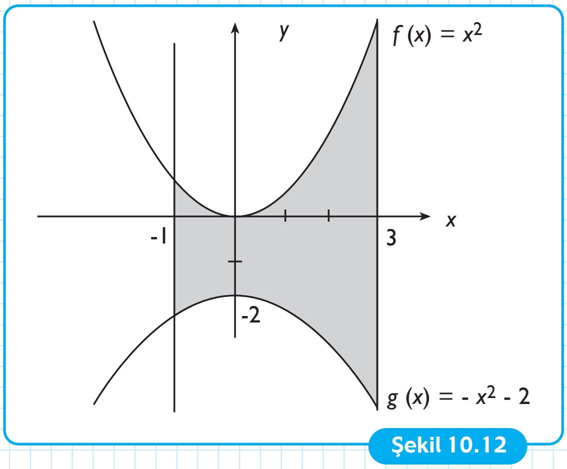
$$S = \int_0^1 \left[x - x^2\right] dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\ \text{br}^2$$

ÖRNEK 18

$f\,(x) = x^2$ ***ve*** $g\,(x) = -x^2 - 2$ ***fonksiyonlarının gösterdikleri eğriler ile*** ***$x = -1$, $x = 3$ doğruları arasında kalan alan nedir?***

ÇÖZÜM

$f\,(x)$ ve $g\,(x)$ fonksiyonlarının grafikleri ile istenilen alan aşağıdaki Şekil 10.12 de gösterilmiştir.



Şekil 10.12

$$S = \int_{-1}^{3} \left[x^2 - \left(-x^2 - 2\right)\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{3} \left[x^2 + x^2 + 2\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(2x^2 + 2\right) dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{3} = (18 + 6) - \left(-\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{80}{3}\ \text{br}^2$$

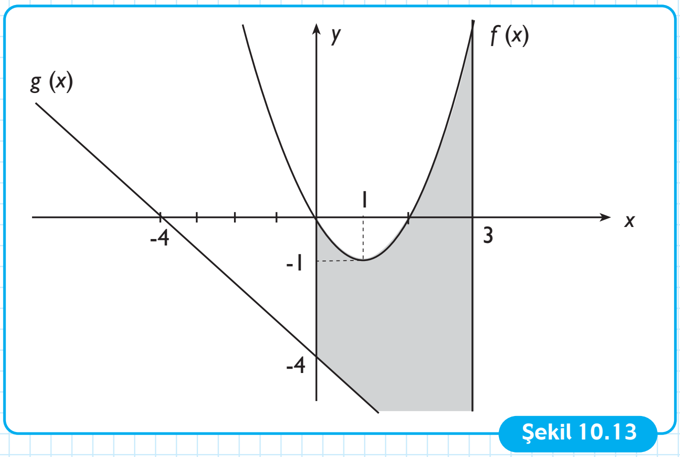
ÖRNEK 19

$f(x) = x^2 - 2x$ ***ve*** $g(x) = -x - 4$ ***fonksiyonlarının gösterdikleri eğriler ile*** $x = 0,\ x = 3$ ***doğruları arasında kalan alanı bulunuz.***

Örneklerde görüldüğü gibi, verilen fonksiyonların çizimlerini yapmadan alan hesaplaması yapmayız.

ÇÖZÜM

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri, $x = 0,\ x = 3$ doğruları arasındaki alan aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 10.13

$$S = \int_0^3 \left[\left(x^2 - 2x\right) - \left(-x - 4\right)\right] dx$$

$$= \int_0^3 \left(x^2 - x + 4\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^3 = \frac{33}{2}\ \text{br}^2$$

ÖRNEK 20

$f(x) = x^2 - 10x$ ***ve*** $g(x) = -x^2 + 10x$ ***fonksiyonlarının gösterdiği eğriler arasındaki alan nedir?***

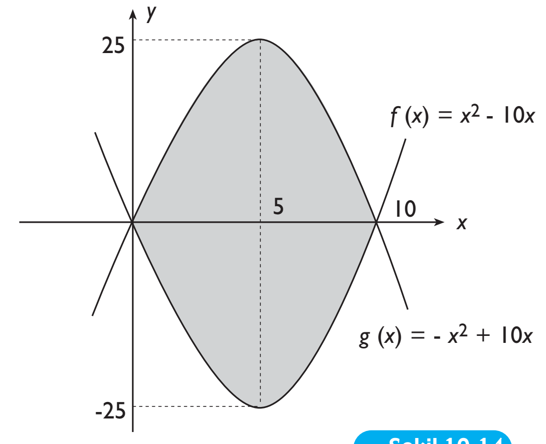
ÇÖZÜM

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının kesim noktalarını bulmak için ortak çözümün yapılması gerekir.

$$x^2 - 10x = -x^2 + 10x$$
$$2x^2 - 20x = 0$$
$$x_1 = 0\ ,\ x_2 = 10$$

Örnekte verilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının gösterdikleri eğrilerin kesim noktalarını bulmak gerekmektedir. Kesim noktaları iki eğrinin denklemlerinin ortak çözümü ile bulunur.

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının gösterdikleri eğriler ile hesaplanması istenilen alan aşağıdaki şekilde taralı olarak gösterilmiştir.



Şekil 10.14

$$S = \int_0^{10} \left[\left(-x^2 + 10x\right) - \left(x^2 - 10x\right)\right] dx = \int_0^{10} \left(-2x^2 + 20x\right) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 10x^2\right]_0^{10}$$

$$= -\frac{2000}{3} + 1000 = \frac{1000}{3} \text{ br}^2$$

BELİRLİ İNTEGRAL YARDIMIYLA TÜKETİCİ VE ÜRETİCİ RANTININ HESAPLANMASI

Bir tüketici, almak istediği bir tüketim malı için uygun gördüğü bir fiyatı ödemeye hazırdır. Tüketici bu malı alırken ödeyeceği fiyat ödemeye hazır olduğu fiyattan daha düşük ise aradaki farka **tüketici rantı** denir. Başka bir deyimle, tüketici ödemeye hazır olduğu fiyattan daha düşük fiyattan bir mal aldığı için kazançlı çıkacaktır.

Ekonomi derslerinde tanımlarını bildiğimiz üretici ve tüketici rantlarının belirli integral yardımıyle nasıl bulunacağı açıklanacaktır.

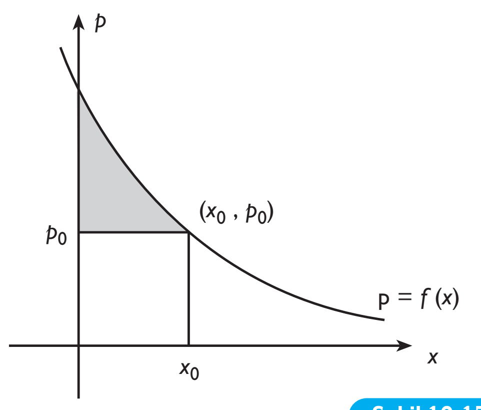
Tüketici rantını talep fonksiyonu yardımıyla belirleyeceğiz. Bildiğiniz gibi, bir malın talep edilen miktarlarıyla bu malın fiyatları arasında talep fonksiyonu dediğimiz bir fonksiyonel ilişki vardır.

Talep ile fiyat arasındaki ilişki ters yönlü olduğu için talep fonksiyonu azalan bir fonksiyondur. Aşağıda bir malın fiyatı p, talep edilen miktarlar x ve $(x_0\ ,\ p_0)$ denge noktası olmak üzere $p = f(x)$ ile talep fonksiyonunun grafiği Şekil 10.15'de gösterilmiştir.

Tüketici rantının bulunması için firmanın talep fonksiyonunu belirlemesi gerekmektedir. x_0 fiyat düzeyinde tüketici rantı,

$$TR = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0\, x_0$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 10.15

Şekilde taralı olarak gösterilen alan tüketicinin ödemeye hazır olduğu ve daha düşük fiyattan mal aldığı için ödemediği tutarı göstermektedir. Bu alan verilen tanıma göre tüketici rantını verecektir.

$$TR = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0$$

ÖRNEK 21

Talep fonksiyonu $p = 50 - 3x$ olan bir mal için talep miktarı 10 birim olduğunda tüketici rantını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x_0 = 10$ için $p_0 = 50 - 3 \,.\, 10 = 20$ olduğundan

$$TR = \int_0^{10} \left(50 - 3x\right) dx - 10 \,.\, 20$$

$$= \left[50x - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{10} - 200$$

$$= 500 - 150 - 200 = 150 \text{ birim}$$

olacaktır.

ÖRNEK 22

Talep fonksiyonu $p = \dfrac{60}{3 + x}$ olan bir mal için fiyat $p_0 = 5$ olduğunda tüketici rantını bulunuz.

ÇÖZÜM

$p_0 = 5$ için talep fonksiyonu yardımıyla talep miktarı olan x_0 değerini bulalım.

$$5 = \frac{60}{3 + x_0} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 9$$

$$TR = \int_0^{9} \left(\frac{60}{3 + x}\right) dx - p_0 \,.\, x_0$$

$$= \left[60 \ln|x + 3|\right]_0^9 - 9 \,.\, 5 = 60 \,.\, \left[\ln 12 - \ln 3\right] - 45$$

$$= 60 \ln 4 - 45 = 120 \ln 2 - 45 \text{ birim}$$

ÖRNEK 23

Talep fonksiyonu $p = -x^2 + 9$ olan bir mal için $x_0 = 2$ değerindeki tüketici rantını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x_0 = 2$ ye karşı gelen p_0 değeri, talep fonksiyonundan,

$$p_0 = -(2)^2 + 9 = 5$$

olarak bulunur.

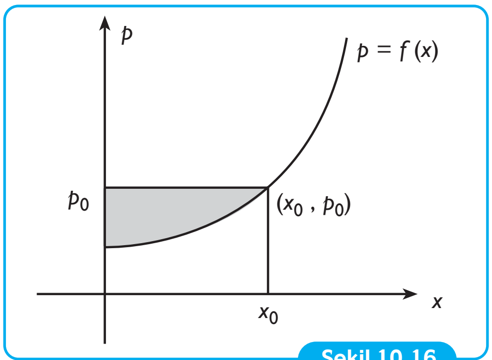
$$TR = \int_0^2 \left(- x^2 + 9\right) dx \ - 5 \ . \ 2$$

$$= \left[- \frac{x^3}{3} + 9x \right]_0^2 - 10 \ = \ \frac{16}{3} \ \text{birim}$$

Bir malın arz fonksiyonu, bu malın fiyatlarıyla bu fiyatlarda arz edilen miktarları arasındaki fonksiyonel ilişkiyi göstermektedir. Bir malın arz edilen miktarları x değişkeniyle, fiyatları ise p değişkeni ile gösterilirse, talep fonksiyonuna benzer şekilde arz fonksiyonu,

$$p = f(x)$$

olacaktır. Arz fonksiyonu, iktisat derslerinden bildiğiniz gibi, artan bir fonksiyondur. Arz fonksiyonu ile $(x_0 \ , \ p_0)$ denge noktası aşağıda Şekil 10.16 da genel olarak gösterilmiştir.



Şekil 10.16

Bir üretici ürettiği malları piyasada satmaya hazır olduğu fiyattan daha yüksek bir fiyattan satarsa daha fazla bir kazanç elde eder. İşte bu kazanca **üretici rantı** denir.

Şekilde bu rant taralı alan olarak gösterilmiştir. Tüketici rantı belirli integralin alan bulma uygulaması yardımıyla,

$$ÜR = p_0 \ x_0 \ - \int_0^{x_0} f(x) \ dx$$

formülüyle bulunur.

Ekonomi derslerinde gördüğümüz gibi, arz fonksiyonu verildiğinde üretici rantının nasıl bulunacağı açıklanacaktır. Eğer $f(x) = p$ arz fonksiyonu ise üretici rantı, $(x_0 \ , \ p_0)$ noktasında,

$$ÜR = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} f(x) \, dx$$

formülüyle bulunur.

ÖRNEK 24

x değişkeni üretim miktarlarını p değişkeni fiyatları göstermek üzere, bir mal için arz fonksiyonu,

$$p = \sqrt{x + 9}$$

olarak belirlenmiştir. Talep miktarı $x_0 = 7$ olduğunda üretici rantını bulunuz.

ÇÖZÜM

$p_0 = \sqrt{7+9} = 4$ olduğundan

$$ÜR = 4 \,.\, 7 - \int_0^7 \sqrt{x+9}\; dx$$

$$= 28 - \left[\frac{2}{3}(x+9)\sqrt{x+9}\right]_0^7$$

$$= 28 - \left[\frac{2}{3} \,.\, 16 \,.\, 4 - \frac{2}{3} \,.\, 9 \,.\, 3\right] = \frac{10}{3} \text{ birim}$$

bulunur.

ÖRNEK 25

Bir mal için x değişkeni miktarı, p değişkeni fiyatı göstermek üzere arz ve talep fonksiyonları aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

$p = 20 - 3x^2$ ***Talep fonksiyonu***
$p = 2x^2$ ***Arz fonksiyonu***

Bu fonksiyonlardan yararlanarak denge noktasındaki tüketici ve üretici rantlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Denge noktası arz ve talep fonksiyonlarının kesim noktasıdır. Denge noktasındaki fiyat ve miktarı bulmak için verilen fonksiyonları ortak çözelim.

$$20 - 3x^2 = 2x^2$$
$$20 = 5x^2$$
$$4 = x^2 \;\Rightarrow\; x = \pm 2 \,,\; x_0 = -2 \text{ olamayacağından } x_0 = 2 \,,\; p_0 = 8 \text{ olur.}$$

$$TR = \int_0^2 \left(20 - 3x^2\right) dx - 2 \,.\, 8 = \left[20x - x^3\right]_0^2 - 16 = 16 \text{ br}$$

bulunur. Benzer olarak,

$$ÜR = 2 \,.\, 8 - \int_0^2 \left(2x^2\right) dx = 16 - \left[\frac{2\,x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3} \text{ br}$$

bulunur.

SIRA SİZDE 2

Aşağıda verilen arz ve talep fonksiyonlarından yararlanarak yanlarında gösterilen fiyat düzeylerindeki üretici ve tüketici rantlarını bulunuz.

1. Talep fonksiyonu $p = -2x + 3$ ise $x_0 = 1$ noktasındaki tüketici rantı nedir?
2. Arz fonksiyonu $p = 4x + 7$ ise $x_0 = 1$ noktasındaki üretici rantını bulunuz.

Kendimizi Sınayalım

1. $f(x) = x^2$ parabolü, $x = 1$, $x = 2$ doğruları ve x ekseni arasında kalan alan nedir?

a. $\frac{13}{3}$

b. $\frac{11}{3}$

c. $\frac{10}{3}$

d. $\frac{7}{3}$

e. $\frac{1}{13}$

2. $f(x) = 9 - x^2$ parabolü $x = -2$, $x = 3$ doğruları ve x ekseni ile sınırlanan bölgenin alanı kaç birim karedir?

a. $\frac{87}{5}$

b. $\frac{89}{5}$

c. $\frac{100}{3}$

d. $\frac{101}{3}$

e. $\frac{103}{3}$

3. $f(x) = 2x - x^2$ parabolü $x = -1$, $x = 2$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı kaç birim karedir?

a. $\frac{7}{3}$

b. $\frac{8}{3}$

c. $\frac{10}{3}$

d. $\frac{11}{3}$

e. $\frac{13}{3}$

4. $f(x) = 2x^2$ ve $g(x) = 27 - x^2$ parabolleri ile sınırlanan bölgenin alanı kaç birim karedir?

a. 108

b. 107

c. 106

d. 105

e. 100

5. $f(x) = x^2$ parabolü ve $g(x) = -x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanı kaç birim karedir?

a. $\frac{3}{2}$

b. 1

c. $\frac{1}{5}$

d. $\frac{1}{6}$

e. $\frac{1}{8}$

6. x talep miktar ve p de fiyat olmak üzere, bir mal için talep fonksiyonu,

$$p = -x + 3$$

olarak belirlenmiştir. Buna göre, $x_0 = 2$ için tüketici rantı nedir?

a. 4

b. 3

c. 2

d. 1

e. $\frac{1}{2}$

7. x üretim miktarı ve p fiyat olmak üzere, bir mal için arz fonksiyonu,

$$p = 16 + x$$

olarak belirlenmiştir. Buna göre, $x_0 = 6$ için üretici rantı nedir?

a. 12

b. 13

c. 15

d. 18

e. 20

Sir Isaac Newton (1643 - 1727)

Günümüz diferansiyel ve integral hesabın kurucularından olan Newton, optik ve yerçekimi konularındaki çalışmaları onun dünyanın en büyük bilim adamlarından biri olarak bilinmesine neden olmuştur.

"Diferansiyel ve integral hesap her kilidi açan öyle bir anahtardır ki, onun sayesinde matematikçiler geometrinin ve onun sonucu olarak da doğanın sırlarını keşfederler"

P. BERKELEY

"Modern matematik gittikçe hesap yerine düşünceye yöneliyor. Buna rağmen matematiğin bazı dalları vardır ki, hesaplama her zaman önemini koruyacaktır."

P. G. LEJEUNE - DIRICHLET