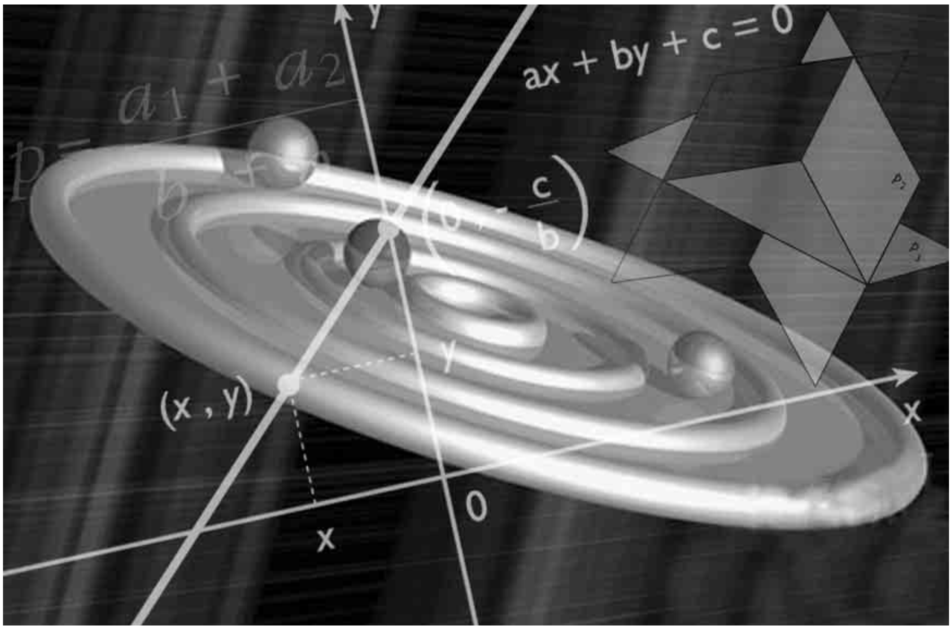
Doğrusal Denklem Sistemleri



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *İki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerinin grafik çözümlerini yapabilecek,*
- *n-bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerinin çözüm yöntemlerini öğrenecek,*
- *Ekonomide arz ve talep arasındaki ilişkinin matematiksel olarak ifade edilmesine bir örnek olarak, doğrusal arz-talep fonksiyonlarını inceleyecek, denge fiyatı ve denge miktarının bulunmasını öğreneceksiniz.*

İçindekiler

DİKKAT

- ***Ünite içinde geçen size yeni olan kavramlar üzerinde düşünmelisiniz, örnekleri dikkatlice incelemelisiniz.***
- ***Verilenlerin ve bulunması istenilenlerin neler olduğunu öncelikle belirlemelisiniz.***
- ***Size bırakılan alıştırmaları kağı ve kalem kullanarak çözmelisiniz.***

Giriş

Bir gıda pazarı, fiyatları 1,5 milyon TL/kg ve 2 milyon TL/kg olan iki çeşit çayı karıştırmak suretiyle 100 kg karma çay hazırlamıştır. Bu karma çayın fiyatı 1,8 milyon TL/kg olarak belirlenmişse, 100 kg karma çay içindeki ucuz ve pahalı çay miktarları ne olur?

Ortaöğretim yıllarında yukarıdaki türden problemlerin çözümleriyle uğraşmış olmalısınız. Bu türden bir problemi çözmek için, adına iki bilinmeyenli denklemler dediğimiz denklemlerden yararlandınız. Çeşitli havuz problemlerinin, faiz problemlerinin uygun biçimde oluşturulan denklemler yardımıyla kolayca çözülebildiğini anımsıyor olmalısınız. Şimdi ise, daha çok bilinmeyen ve daha çok denklemden oluşan sistemlerin çözümleri üzerinde duracağız. Adına doğrusal denklem sistemi diyeceğimiz bu tür denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği konularını araştıracağız.

Matematikte olduğu kadar istatistik, fizik, biyoloji, mühendislik, ekonomi gibi alanlar için de birçok problem bir doğrusal denklem ya da doğrusal denklem sistemi biçiminde ifade edilir ve çözümü aranır. Bazen doğrusal denklem sistemi olarak ifade edilemeyen problemler de doğrusal denklem sistemine dönüştürülerek yaklaşık çözümler bulunmaya çalışılır. Bu nedenle doğrusal denklem sistemleri doğrusal cebirin önemli bir konusunu oluşturur.

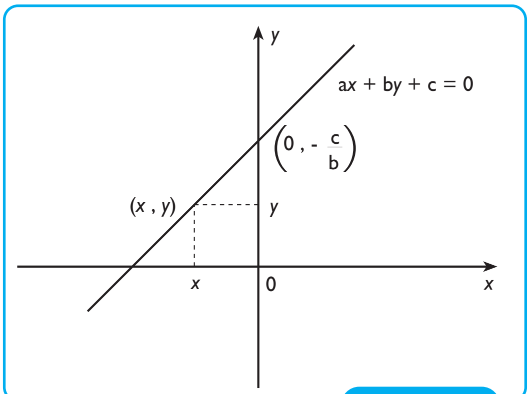
Bu ünitede, genel doğrusal denklem sistemlerinin ifade edilişi, homojen ve homojen olmayan sistemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğinin araştırılması, yok etme yöntemiyle çözümün bulunması konuları üzerinde duracağız. Daha sonra, matrisler konusunun işlendiği ünite içinde de matris yöntemleriyle doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerinin bulunmasını yeniden ele alacağız.

İKİ BİLİNMEYENLİ DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ

AMAÇ 1 ***İki bilinmeyenli bir doğrusal denklem sisteminin grafik ve analitik çözümünün bulunmasıdır.***

a, b gerçel sayılar, $a \neq 0$ ve x bir bilinmeyen olmak üzere $ax + b = 0$ biçiminde bir eşitliğe **bir bilinmeyenli bir doğrusal (lineer) denklem** denildiğini biliyoruz. Böyle bir denklemi sağlayan tek bir sayı vardır; bu sayı $x = -\frac{b}{a}$ dır. Bu sayıya $ax + b = 0$ doğrusal denkleminin çözümü denir. Örneğin, $3x + 2 = 0$ doğrusal denklemin çözümü $x = -\frac{2}{3}$ dür.

a, b, c gerçel sayılar ve $a \neq 0$, $b \neq 0$ olmak üzere, x, y bilinmeyenleri için $ax + by + c = 0$ biçimindeki bir eşitliğe **iki bilinmeyenli bir doğrusal denklem** denir. Böyle bir denklemin koordinat düzlemde bir doğruyu temsil ettiğini biliyoruz. Dolayısıyla bu doğru üzerindeki herhangi bir noktayı temsil eden (x , y) sıralı ikilisi $ax + by + c = 0$ denklemini sağlar, yani denklemin bir çözümüdür. Bu nedenle böyle bir denklemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. y bilinmeyenini x e bağlı olarak çözersek, $y = -\frac{1}{b}(ax + c)$ bulunur. x in alacağı her farklı değere karşılık y nin farklı bir değeri bulunur. O halde (x , y) çözümlerinin her birisi doğru üzerinde bir noktayı gösterir (Şekil 11.1). Sözgelişi, $2x - 3y + 1 = 0$ doğrusal denkleminin $(0 , 1/3)$, $(1 , 1)$, $(2, 5/3)$ çözümleri $2x - 3y + 1 = 0$ doğrusu üzerinde birer noktanın koordinatlarıdır.

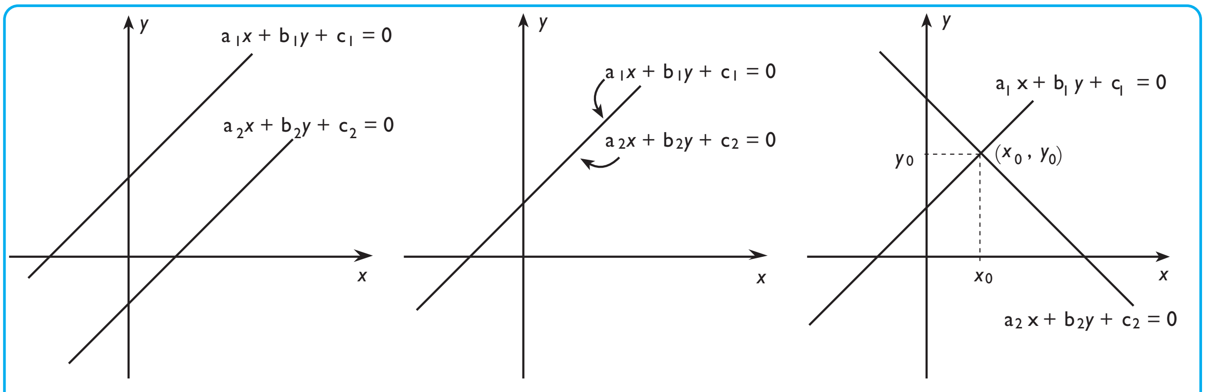


Şekil 11.1

Şimdi iki bilinmeyenli iki doğrusal denklemin birlikte verildikleri durumu ele alalım. Bu denklemler, genel halde

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

olsunlar. Bu denklemlere iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bir **doğrusal denklem sistemi** denir. Denklemleri birlikte sağlayan bir (x_0, y_0) ikilisi sistemin bir çözümüdür. Böyle bir doğrusal denklem sisteminin çözümünü aramak, geometrik olarak, düzlemde bu denklemlerin temsil ettiği doğruların kesim noktasını aramak demektir. Doğruların paralel olması durumunda hiçbir ortak çözüm olmayacaktır [Şekil 11.2 (a)]; çakışık olmaları durumunda sonsuz çözüm [Şekil 11.2 (b)], kesişiyor olmaları durumunda ise tek çözüm olacaktır [Şekil 11.2 (c)].



(a) Doğrular paralel Sistemin çözümü yok

(b) Doğrular çakışık Sistemin sonsuz çözümü var

(c) Doğrular kesişiyor Sistemin tek çözümü var

Şekil 11.2

ÖRNEK 1

$2x + 3y = 10$

$-8x + y = 25$

doğrusal denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

Bu denklem sistemindeki denklemlerden her biri bir doğru denklemidir.

$2x + 3y = 10$ doğrusunun eğimi $-\frac{2}{3}$ ve $-8x + y = 25$ doğrusunun eğimi 8 olduğundan bu doğrular kesişirler. Dolayısıyla verilen denklem sisteminin tek bir çözümü vardır. Şimdi bu çözümü yok etme yöntemiyle bulalım. Bu yönteme göre, önce her iki denklemde bilinmeyenlerden birinin katsayılarını eşitleyerek, bilinmeyenlerden birini yok edip ikincisini hesaplayalım. Bunun için birinci denklemi 4 ile çarpıp ikincisi üzerinde toplayalım;

$$\begin{aligned} 4\ /2x + 3y &= 108 \\ -8x + \quad y &= 25 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 12y &= 40 \\ \underline{-8x + \quad y} &\underline{= 25} \\ 13y &= 65 \end{aligned} \quad \rightarrow y = 5$$

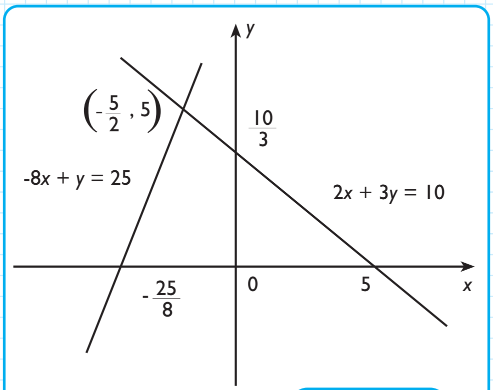
bulunur. $y = 5$ değerini birinci denklemde yerine yazalım:

$2x + 3(5) = 10$

$2x = 10 - 15$

$2x = -5$

$x = -\frac{5}{2}$



Şekil 11.3

olur. Böylece sistemin tek çözümü $x = -\frac{5}{2}$, $y = 5$ olarak bulunmuş olur. Doğruların kesim noktası $\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$ dir.

ÖRNEK 2

$3x - 2y = 7$
$-21x + 14y = -49$

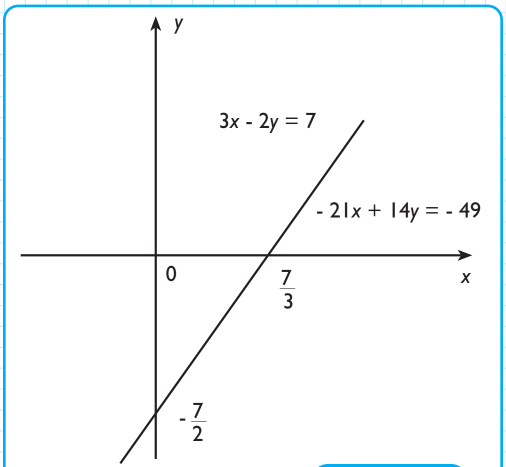
denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

Bu denklem sisteminin denklemlerinin temsil ettiği doğruların eğimleri eşittir; m = 3/2 dir. Dolayısıyle bu doğrular ya çakışıktır ya da birbirlerine paraleldir. y - ekesenini kesim noktaları da aynı, $\left(-\frac{7}{2}\right)$ olduğundan bu doğrular çakışıktır. O halde bu doğru üzerindeki her bir nokta sistemin bir çözümüdür; yani verilen sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. Şimdi cebirsel olarak bu sonucu doğrulayalım.

$$\begin{array}{rl} 7\,/\; 3x - 2y = 7 & \rightarrow \quad 21x - 14y = 49 \\ -21x + 14y = 49 & \quad\;\; \underline{-21x + 14y = -49} \\ & \qquad\qquad 0 = 0 \end{array}$$

Bu sonuç sistemin iki denkleminin eşdeğer olduğunu gösterir. Bu nedenle bu denklemlerden birisi, diyelim ki $3x - 2y = 7$ denklemi, alınarak çözüm yapılır. $3x - 2y = 7$ denkleminin x e bağımlı çözümü,



Şekil 11.4

$$y = \frac{1}{2}(3x - 7)$$

olur. x değişkeninin alacağı her bir değere karşılık y nin bir değeri bulunur. Bu nedenle verilen sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. Bazı özel çözümleri yazabiliriz:

$x = 0$ için $y = -\frac{7}{2}$

$x = 1$ için $y = -2$

$x = -1$ için $y = -5$

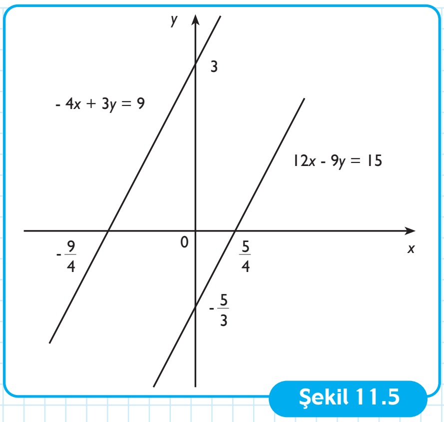
ÖRNEK 3

$-4x + 3y = 9$
$12x - 9y = 15$

denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

Önce geometrik olarak çözümün var olup olmadığını görelim. Denklemlerin her birinin gösterdiği doğrunun eğimi $m = \frac{4}{3}$ dir. Fakat bu doğrulardan birincisinin y-ekseninin kesim noktası 3, ikincisinin $-\frac{5}{3}$ olduğundan bunlar farklı paralel doğrulardır. Bu nedenle de ortak bir noktaları yoktur. O halde verilen sistemin bir çözümü yoktur. Şimdi bu sonucu cebirsel olarak doğrulayalım.



Şekil 11.5

$$\begin{array}{rl} 3/ & -4x + 3y = 9 \\ & 12x - 9y = 15 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -12x + 9y = 27 \\ 12x - 9y = 15 \\ \hline 0 = 42 \end{array}$$

Böyle bir eşitlik olamayacağına göre, verilen denklem sisteminin bir çözümü yoktur.

ÖRNEK 4

Bir gıda pazarı, fiyatları 1,5 milyon TL/kg ve 2 milyon TL/kg olan iki tür çaydan 100 kg karma çay hazırlamıştır. Karma çayın fiyatı 1,8 milyon TL/kg olduğuna göre, her bir çaydan ne miktar karıştırılmıştır?

ÇÖZÜM

x_1 = 100 kg karma çay içindeki 1,5 milyon TL/kg lık çay miktarı,
x_2 = 100 kg karma çay içindeki 2 milyon TL/kg lık çay miktarı

olsun. O zaman,

$$x_1 + x_2 = 100 \qquad (1)$$

eşitliği yazılır. Diğer taraftan karma çayın fiyatı 1,8 milyon TL/kg olduğuna göre

$$1{,}5x_1 + 2x_2 = 1{,}8 \,.\, 100 \qquad (2)$$

olmalıdır. Böylece (1) ve (2) denklemlerinden

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 100 \\ 1{,}5x_1 + 2x_2 &= 180 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Sistemi çözelim:

$$\begin{array}{rl} -2/ & x_1 + x_2 = 100 \\ & 1{,}5x_1 + 2x_2 = 180 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -2x_1 - 2x_2 = -200 \\ 1{,}5x_1 + 2x_2 = 180 \\ \hline -0{,}5x_1 = -20 \end{array}$$

$x_1 = 40$ ve böylece $x_2 = 60$ bulunur. O halde, 100 kg karma çay içinde 40 kg ucuz çay, 60 kg pahalı çay olmalıdır.

SIRA SİZDE 1

1. Aşağıda verilen doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerini önce geometrik olarak (grafik yoluyla), sonra da cebirsel olarak araştırınız.

a) $2x + y = -1$, $-2x + y = 1$

b) $3x - y = 2$, $-18x + 6y = -12$

c) $2x + y = 3$, $4x + 2y = 1$

d) $x = 3$, $x + y = 5$

e) $-2x + y = -3$, $y = 1$

2. Aşağıda verilen doğrusal denklem sistemlerinin her birinin çözümünün var olup olmadığını, varsa çözümün tek mi sonsuz çoklukta mı olduğunu belirleyiniz ve çözümü bulunuz.

a) $x - y = 0$, $2x + 2y = 0$ **b)** $-2x + 4y = 36$, $x - 2y = 20$ **c)** $2x - y = 4$, $x + 2y = 7$

d) $2x = y - 3$, $-6x + 3y = 9$ **e)** $-x + 3y = 0$, $2x - 6y = 8$ **f)** $3x - 2y = 5$, $-2x + 3y = 4$

n-BİLİNMEYENLİ DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ ($n \geq 3$)

AMAÇ 2

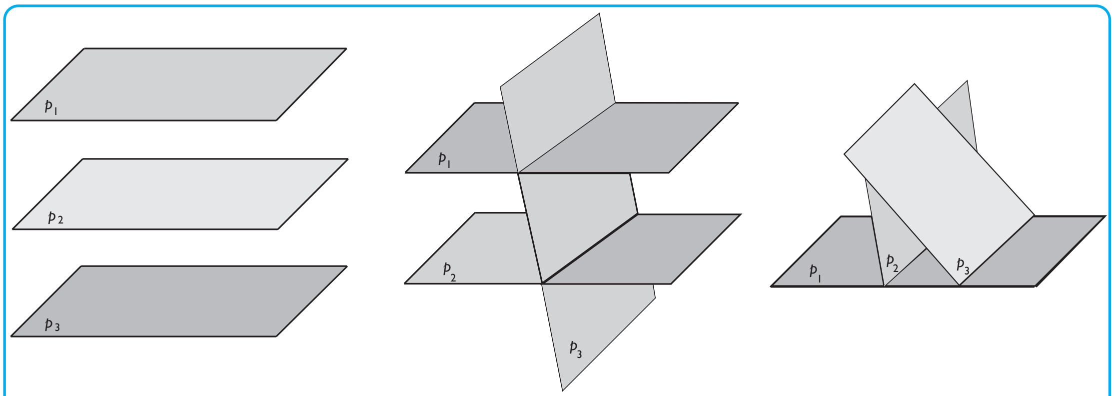
Çok bilinmeyenli çok denklemden oluşan doğrusal denklem sisteminin çözümlerinin Gauss yok etme yöntemiyle bulunması.

Önce iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bir doğrusal denklem sisteminin çözümünün araştırılmasında izlenen yok etme yöntemini, 3-bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir doğrusal denklem sisteminin çözümünün araştırılmasına yönelik olarak genelleştirelim. Sonra da n-bilinmeyenli m sayıda doğrusal denklemden oluşan sistemlerin çözümlerinin bulunması konusu üzerinde duralım.

Bilinmeyen sayısı ve denklem sayısı üç olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0 \end{aligned}$$

biçiminde üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir doğrusal denklem sistemi elde edilir. Her üç denklemi birlikte sağlayan bir (x_0, y_0, z_0) sıralı üçlüsüne sistemin bir **çözümü** denir. Geometrik olarak, bu denklemlerin her biri koordinat uzayı içinde bir düzlemi temsil eder. Dolayısıyla sistemin ortak çözümü olmayabilir (üç düzlemden en az ikisinin birbirlerine paralel olması veya farklı doğrular boyunca kesişmeleri durumu [Şekil 11.6 (a), (b) ve (c)]), sonsuz çoklukta çözüm olabilir (üç düzlemin bir doğru boyunca kesişmeleri veya çakışık olmaları durumu, [Şekil 11.7(a)]) ya da tek bir çözüm olabilir (üç düzlemin tek ortak noktaları olması durumu, [Şekil 11.7(b)]).

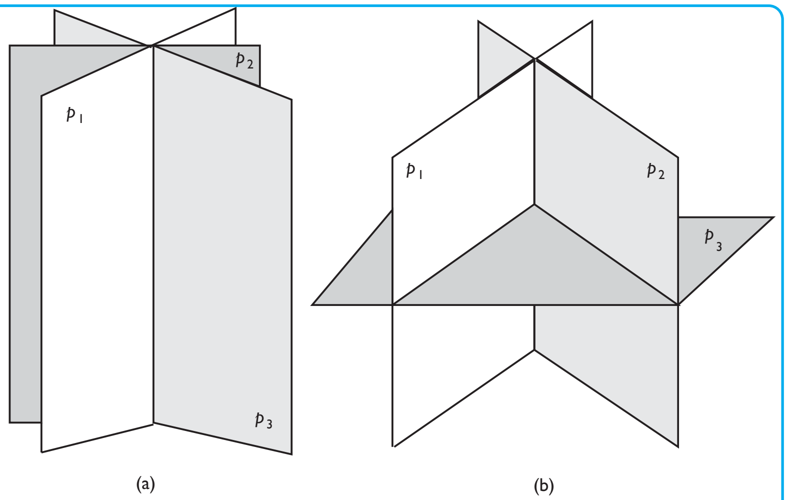


(a)
Düzlemler paralel
Sistemin çözümü yok

(b)
İki paralel düzlem üçüncüsü tarafından kesiliyor
Sistemin çözümü yok

(c)
Üç düzlem farklı doğrular boyunca kesişiyorlar
Sistemin ortak çözümü yok

Şekil 11.6



Üç düzlem bir doğru boyunca kesişiyorlar
Sistemin sonsuz çoklukta çözümü var

Üç düzlemin tek bir ortak noktası var
Sistemin tek çözümü var

Şekil 11.7

Şimdi farklı durumlar için birer örnek verelim.

ÖRNEK 5

$$\begin{aligned} 7x - 3y + 3z &= 28 \\ -x - 3y + z &= 12 \\ 5x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Üçüncü denklemi -3 ile çarpıp birinci denklemle ve -1 ile çarpıp ikinci denklemle toplarsak, birinci ve ikinci denklemden z bilinmeyeni yok olur. Böylece verilen sistem,

$$\begin{aligned} -8x - 12y &= 28 \\ -6x - 6y &= 12 \\ 5x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemine dönüşür. Bu sistemin ikinci denklemini -2 ile çarpıp birinci denklem üzerinde toplayalım;

$$\begin{aligned} 4x &= 4 \\ -6x - 6y &= 12 \\ 5x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin birinci denkleminden $x = 1$ bulunur. İkinci denklemde $x = 1$ yazılınca $y = -3$ olur. Üçüncü denklemde $x = 1$, $y = -3$ yazılınca $5(1) + 3(-3) + z = 0$ veya $z = 4$ elde edilir. Böylece son sistemin tek çözümü $x = 1$, $y = -3$, $z = 4$ olur. Bu çözüm aynı zamanda verilen denklem sisteminin de tek çözümüdür. Bunu doğrulamak için bulunan bu değerleri verilen sistemde yerine yazalım,

$$\begin{aligned} 7(1) - 3(-3) + 3(4) &= 28 \\ -(1) - 3(-3) + 4 &= 12 \\ 5(1) + 3(-3) + 4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{veya} \qquad \begin{aligned} 28 &= 28 \\ 12 &= 12 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

olarak istenilen doğrulanmış olur.

ÖRNEK 6

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= -37 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Kolaylık ve kısalık için verilen sistemin birinci denklemini R_1, ikinci denklemini R_2 , üçüncü denklemini R_3 ile gösterelim. k sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere, $kR_i + R_j$ $(i , j = 1 , 2 , 3$ ve $i \neq j)$ simgesiyle i-yinci denklemin iki tarafının k ile çarpılıp j-yinci denklem üzerinde toplanmasını, kR_i ile de i-yinci denklemin k ile çarpılmasını gösterelim. Şimdi bu gösterimleri kullanarak verilen sistemin çözümünü araştıralım.

$$\begin{aligned} R_1 &: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ R_2 &: 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ R_3 &: 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -37 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} R_1 &: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ R'_2 = -2R_1 + R_2 &: -x_2 + x_3 = -7 \\ R'_3 = -3R_1 + R_3 &: -7x_2 + 7x_3 = -49 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} R_1 &: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ R'_2 &: -x_2 + x_3 = -7 \\ -7R'_2 + R'_3 &: 0 = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} R_1 &: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ R'_2 &: -x_2 + x_3 = -7 \end{aligned}$$

Elde edilen son denklem sistemi üç bilinmeyenli iki denklemden oluşan bir sistemdir. Bu sistemde x_3 ü bağımsız değişken olarak düşünüp x_1 ve x_2 bilinmeyenlerini x_3 e bağlı olarak çözebiliriz. $x_3 = t$ diyelim. R'_2 den $x_2 = x_3 + 7 = t + 7$ ve R_1 den $x_1 = -2x_2 + x_3 + 4 = -2\,(t + 7) + t + 4 = -\,t - 10$ olur. Böylece sistemin çözümü, t parametresine bağlı olarak

$$\begin{aligned} x_1 &= -\,t - 10 \\ x_2 &= t + 7 \\ x_3 &= t \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

olur. Her t gerçel sayısı için $(-t\,-10,\ t + 7,\ t)$ sıralı üçlüsü verilen sistemin bir çözümü olur. Bu nedenle verilen sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. Bu sonucu geometrik olarak şöyle yorumlayabiliriz: Verilen denklem sisteminin denklemlerinin temsil ettiği düzlemler, parametrik denklemleri yukarıdaki şekilde olan doğru boyunca kesişirler.

ÖRNEK 7

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= -4 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 6x_2 + 12x_3 &= 5 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} R_1 &: x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ R_2 &: -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ R_3 &: -2x_1 - 6x_2 + 12x_3 = 5 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} R_1 &: x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ R'_2 = 2R_1 + R_2 &: 7x_2 - 8x_3 = -8 \\ R_3 = 2R_1 + R_3 &: 0 = -3 \end{aligned}$$

Dönüştürülen sistemin üçüncü denklemi R'_3 geçersiz bir eşitlik olduğundan verilen sistemin bir çözümü olamaz.

Bilinmeyen Sayısı *n*, Denklem Sayısı *m* Olan Sistemler

Şimdi genel bir doğrusal denklem sistemi tanımlayalım ve 2 veya 3 bilinmeyenli sistemlerin çözümleri için verilen yöntemi genelleştirelim.

Genel olarak, $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ ler bilinmeyenler a_{ij} ve b_i ler gerçel sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m
\end{aligned}$$

biçiminde olan bir denklem sistemine, n **bilinmeyenli** m **denklemden** oluşan bir **doğrusal denklem sistemi** denir. Eğer b_i lerin hepsi sıfır ise sisteme **homojen**, en az bir $b_i \neq 0$ ise sisteme **homojen olmayan doğrusal denklem sistemi** denir. n bilinmeyenli bir doğrusal denklem sisteminin bir çözümü her bir denklemi sağlayan bir $(k_1 , k_2 , \ldots , k_n)$ n-sıralısıdır. Böyle bir doğrusal denklem sisteminin tek çözümü olabilir, sonsuz çoklukta çözümü olabilir ya da hiçbir çözümü olmayabilir. Eğer sistem homojen, yani $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$ ise $(0 , 0 , \ldots , 0)$ n-sıralısı bir çözümdür. Bu tür çözüme homojen sistemin **sıfır çözümü** (aşikâr çözümü) denir. O halde, homojen bir sistemin daima bir çözümü (en az sıfır çözümü) vardır. Homojen olmayan bir sistemin çözümünün varlığı, tekliği konusu sistemin bilinmeyen sayısı, denklem sayısı, a_{ij} katsayıları ve b_i sabitleri ile ilişkilendirilerek kısaca irdelenecektir. Bunun için önce basamak biçiminde doğrusal denklem sistemi tanımına değinelim.

Bir doğrusal denklem sistemi, genel olarak, dikdörtgen biçimindedir. Eğer bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit ise sisteme **kare sistem** denir. Denklem sisteminin ilk denkleminden ve ilk bilinmeyenden başlayarak, aşağıya doğru bilinmeyen sayısı giderek azalıyorsa bu tür bir sisteme **basamak biçimindedir** denir. Örneğin;

$$\begin{aligned}
3x_1 - 5x_2 - 10x_3 + x_4 &= -35 \\
x_2 + 7x_3 \qquad &= 5 \\
x_3 + x_4 &= 0 \\
5x_4 &= 3
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\
-x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \\
3x_3 - x_4 &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemlerinden ilki basamak biçiminde homojen olmayan doğrusal denklem sistemi, ikincisi basamak biçiminde homojen olan bir doğrusal denklem sistemidir. Basamak biçimindeki bir sistemin avantajı, sistemin çözümünün var olup olmadığının daha kolay belirlenmesi, çözüm varsa çözümün kolayca bulunabilmesinden gelmektedir.Örneğin, yukarıda verilen homojen olmayan basamak biçimindeki sistemin son denkleminden $x_4 = \frac{3}{5}$, üçüncü denkleminden $x_3 = -\frac{3}{5}$, ikinci denkleminden $x_2 = \frac{46}{5}$, birinci denkleminden $x_1 = \frac{22}{15}$ olarak sistemin çözümü kolayca bulunabilir. Eğer verilen doğrusal denklem sistemi basamak biçiminde değilse, sistem aşağıda tanımlanan üç tür temel satır işlemleriyle çözümü değiştirilmeden basamak biçimine dönüştürülebilir.

Temel satır işlemleri;

I. sistemin herhangi iki denklemin sırasının değiştirilmesi,

II. sistemin bir denklemin her iki yanının sıfır olmayan bir sayı ile çarpılması,

III. sistemin bir denkleminin sıfır olmayan bir katının bir başka denkleme eklenmesi.

Bir doğrusal denklem sistemine sonlu sayıda temel satır işlemi uygulanırsa, sonuçta elde edilen yeni doğrusal denklem sistemine başlangıçtaki sisteme eşdeğer denklem sistemi denir. Eşdeğer denklem sistemlerinin çözümleri varsa, aynıdır. Bu nedenle verilen bir doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulmak için sistem temel satır işlemleriyle basamak biçiminde eşdeğer bir sisteme dönüştürülebilir ve çözüm aranır. Bu biçimde çözüm aramaya **Gauss yok etme yöntemi** denir.

Homojen olmayan bir doğrusal denklem sistemi basamak biçimine dönüştürüldüğünde, eğer denklemlerden birinin birinci tarafı sıfır iken ikinci taraf sıfırdan farklı bir sayı ise, verilen sistemin çözümü yoktur. Bu durumda sistem **tutarsızdır** denir. Eğer sistem tutarsız değil ve bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit ise, sistemin tek bir çözümü vardır (Bu çözüm yukarıdaki örnekte olduğu gibi kolayca bulunur).

Denklem sayısı m, bilinmeyen sayısı n den daha az olduğu durumda $(n\text{-}m)$ tane bilinmeyen bilinen kabul edilerek, sistemin çözümü aranır. Bu durumda sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. Eğer doğrusal denklem sistemi homojen ise, daima sıfır çözümü olduğu açıktır; yani homojen bir sistemin çözümsüzlüğü (tutarsızlığı) söz konusu değildir. Böyle bir sistemin ya tek ya da sonsuz çoklukta çözümü vardır. Sistem basamak biçime dönüştürüldüğünde denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit ise tek çözüm sıfır çözümdür; denklem sayısı bilinmeyen sayısından az ise homojen sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır, $(n\text{-}m)$ tane bilinmeyen bilinen kabul edilerek çözüm yapılır

Özetlersek; m tane denklemden ve n tane bilinmeyenden oluşan homojen olmayan bir doğrusal denklem sistemi için $m < n$ ise, sistemin hiçbir çözümü olmayabilir ya da sonsuz çoklukta çözümü olabilir. Eğer $m \geq n$ ise, hiçbir çözüm olmayabilir, tek çözüm olabilir ya da sonsuz çoklukta çözüm olabilir. Homojen sistemlerde ise, ya sıfır çözüm ya da sonsuz çoklukta çözüm vardır.

Şimdi bu farklı durumlar için örnekler verelim:

ÖRNEK 8

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\
x_1 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\
-x_1 - 4x_2 - x_4 &= 5
\end{aligned}
$$

doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Dört bilinmeyenli dört denklemden oluşan homojen olmayan bir doğrusal denklem sistemi. Bu sistemi satır işlemleriyle basamak biçime dönüştürelim. Bunun için ilk denklemde birinci bilinmeyen x_1 in katsayısı 1 olacak şekilde bir işlem yapabiliriz. Fakat ilk denklemin tüm terimlerini 3 e bölmek uygun olmaz, çünkü kesirli sayılarla işlem yapmak durumunda kalırız. Bu nedenle ilk işlem olarak birinci satır ile ikinci satırın yerlerini değiştirelim:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\
-x_1 - 4x_2 - x_4 &= 5
\end{aligned}
$$

Bu sistemin birinci satırını, sırasıyla -3 ile çarpıp ikinci satır üzerinde, -1 ile çarpıp üçüncü satır üzerinde, 1 ile çarpıp dördüncü satır üzerinde toplayalım:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 8 \\ 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 5 \\ -4x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Şimdi de ikinci satırı, sırasıyla, -1 ile çarpıp üçüncü satır ve 2 ile çarpıp dördüncü satır üzerinde toplayalım:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 8 \\ -3x_3 + 4x_4 &= -3 \\ 9x_3 - 9x_4 &= 18 \end{aligned}$$

Üçüncü satırın üç katını dördüncü satır üzerinde toplayalım:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 8 \\ -3x_3 + 4x_4 &= -3 \\ 3x_4 &= 9 \end{aligned}$$

Bu sistem basamak biçiminde bir doğrusal denklem sistemidir. Dördüncü denklemden $x_4 = 3$ bulunur. Bu değer üçüncü denklemde yerine yazılınca

$$-3x_3 + 4.3 = -3 \qquad \text{veya} \qquad -3x_3 = -3 - 12\ , \qquad x_3 = 5$$

olur. x_3 ve x_4 ün bulunan değerleri ikinci denklemde yerlerine yazılınca $x_2 = -1$ ve birinci denklemde yazılınca $x_1 = -4$ bulunur. O halde, verilen denklem sisteminin tek çözümü var ve bu çözüm $x_1 = -4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 3$; yani (-4 , -1 , 5 , 3) sıralı dörtlüsüdür.

ÖRNEK 9

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -2x + 5y + 7z &= 9 \\ 3x + y + z &= -8 \\ x + 2y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen sistemde üç bilinmeyen dört tane denklem var. Bu denklemlerden herhangi üçünü alıp, üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan sistemin çözümünü araştırırız. Eğer çözüm varsa ve bu çözüm dışarıda kalan denklemi de sağlıyorsa, verilen sistemin çözümü olur; sağlamıyorsa, sistem tutarsızdır. İlk üç denklemden oluşan sistemin çözümünü araştıralım.

$$\begin{aligned} R_1 &: \ x + y - z = 0 \\ R_2 &: \ -2x + 5y + 7z = 9 \\ R_3 &: \ 3x + y + z = -8 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} R_1 &: \ x + y - z = 0 \\ R'_2 = 2R_1 + R_2 &: \ 7y + 5z = 9 \\ R'_3 = -3R_1 + R_3 &: \ -2y + 4z = -8 \end{aligned} \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned} R_1 &: \ x + y - z = 0 \\ R'_2 &: \ 7y + 5z = 9 \\ R''_3 = \frac{1}{2} R'_3 &: \ -y + 2z = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 &: x + y - z = 0 \\ R''_3 &: -y + 2z = 9 \\ R'_2 &: 7y + 5z = 9 \end{aligned}$$

İkinci denklem ile üçüncü denklemin yerlerini değiştirdik.

$$\begin{aligned} R_1 &: x + y - z = 0 \\ R''_3 &: -y + 2z = -4 \\ 7R''_3 + R'_2 &: 19z = -19 \end{aligned}$$

İkinci denklemi 7 ile çarpıp üçüncü denklem üzerinde topladık.

Üçüncü denklemden $z = -1$, ikinci denklemden $y = 2$, birinci denklemden $x = -3$ bulunur. Şimdi bu çözümün verilen sistemin dördüncü denklemini sağlayıp sağlamadığına bakalım:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ -3 + 2.2 - 3(-1) &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

olduğundan verilen denklem sistemi tutarlıdır ve sistemin çözümü (-3, 2, -1) sıralı üçlüsüdür.

ÖRNEK 10

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= -3 \\ x_2 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Sistemi basamak biçimine dönüştürelim: Birinci denklemi -1 ile çarpıp ikinci denklem üzerinde toplayalım.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ x_2 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Bu sistemin üçüncü denklemini -1 ile çarpıp üçüncü denklem üzerinde toplayalım.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Bu sistemin denklem sayısı bilinmeyen sayısından az olduğundan aradaki fark kadar bilinmeyeni bilinen kabul ederek sistemin çözümünü araştıralım. Aradaki fark $4 - 3 = 1$ olduğundan bilinmeyenlerden birini, diyelim ki x_4 ü bilinen kabul edelim. $x_4 = t$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 &= -2 - t \\ x_3 &= 6 - 2t \end{aligned}$$

sistemini elde ederiz. Böylece sistemin t ye bağlı olarak elde edilen çözümü, (bu çözüme parametrik çözüm denir)

$x_4 = t,$ $\quad x_3 = 6 - 2t,$ $\quad x_2 = x_3 - 2 - t = 6 - 2t - 2 - t = 4 - 3t$

$x_1 = -1 - x_2 - x_3 = -1 - 4 + 3t - 6 + 2t = -11 + 5t$

olur. t gerçel sayısının alacağı her değer için sistemin bir özel çözümü bulunur. Bu nedenle verilen sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. Sistemin parametrik çözümü $(-11 + 5t,\ 4 - 3t,\ 6 - 2t,\ t)$ sıralı dörtlüsüdür. İki özel çözümü

$t = 0$ için $x_1 = -11$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, $x_4 = 0$
$t = 1$ için $x_1 = -6$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, $x_4 = 1$

olarak verilebilir.

ÖRNEK 11

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ 3x - y + z &= 5 \\ 2x + 2y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

Sistemi basamak biçimine dönüştürelim: Birinci denklemi -3 ile çarpıp ikinci denklem, -2 ile çarpıp üçüncü denklem üzerinde toplayalım.

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ -4y + 4z &= 8 \\ 0 &= 5 \end{aligned}$$

basamak biçimine dönüşür. Bu sistemin üçüncü denkleminde görülen $0 = 5$ eşitliği olamayacağına göre, verilen sistemin denklemleri tutarsızdır; bir başka deyişle, sistemin çözümü yoktur.

ÖRNEK 12

$$\begin{aligned} R_1 &: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ R_2 &: 3x_1 - 7x_2 - x_4 = 0 \\ R_3 &: 4x_1 - 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 0 \\ R_4 &: x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{aligned}$$

homojen sistemin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Sistemi basamak biçimine dönüştürelim:

$$\begin{aligned} R_1 &: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ R'_2 = -3R_1 + R_2 &: -x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0 \\ R'_3 = -4R_1 + R_3 &: x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 0 \\ R'_4 = -R_1 + R_4 &: 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 &: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ R'_2 &: -x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0 \\ R''_3 = R'_2 + R'_3 &: -12x_3 + 15x_4 = 0 \\ R''_4 = 2R'_2 + R_4 &: -19x_3 + 9x_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 &: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ R'_2 &: -x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0 \\ R'''_3 = -\frac{1}{12} R''_3 &: x_3 - \frac{5}{4} x_4 = 0 \\ R''_4 &: -19x_3 + 9x_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 &: \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0\\
R'_2 &: \quad -x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0\\
R'''_3 &: \quad x_3 - \frac{5}{4}x_4 = 0\\
R'''_4 = 19R'''_3 + R''_4 &: \quad -\frac{59}{4}x_4 = 0
\end{aligned}$$

Sistemin bu basamak biçimi dört bilinmeyen ve dört denklemden oluştuğundan verilen sistemin tek çözümü sıfır çözümdür.

ÖRNEK 13

R_1 : $-x + y + z = 0$
R_2 : $x + 2y + 8z = 0$
R_3 : $x - 3y - 7z = 0$

homojen doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Sistemi basamak biçime dönüştürelim:

$$\begin{aligned}
R_1 &: -x + y + z = 0 & & R_1 &: -x + y + z = 0\\
R'_2 = R_1 + R_2 &: \quad 3y + 9z = 0 &\rightarrow\quad & R''_2 = \tfrac{1}{3}R'_2 &: \quad y + 3z = 0 \quad\rightarrow\\
R'_3 = R_1 + R_3 &: \quad -2y - 6z = 0 & & R''_3 = \tfrac{1}{2}R'_3 &: \quad y + 3z = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 &: -x + y + z = 0\\
R''_2 &: \quad y + 3z = 0
\end{aligned}$$

olur. Şimdi bu homojen sistemin bilinmeyen sayısı 3 denklem sayısı 2 olduğundan bir bilinmeyeni, diyelim ki z yi, bilinen kabul ederek çözüm aranır. $z = t$ için sistemin parametrik çözümü,

$$z = t \quad , \quad y = -3z = -3t \quad , \quad x = y + z = -3t + t = -2t$$

olur. Verilen sistemin t ye bağlı sonsuz çoklukta çözümü vardır. $t = -1$ ve $t = 5$ için iki özel çözümünü yazalım:

$t = -1$ için $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$
$t = 5$ için $x = -10$, $y = -15$, $z = 5$

olur.

SIRA SİZDE 2

Aşağıdaki doğrusal denklem sistemlerinin varsa, çözüm kümelerini bulunuz.

1. $\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &= -30\\ x_1 + x_2 &= -2 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0\\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 &= 16\\ 10x_1 + 3x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 5x + 7y - 10z &= 20\\ 10x + 12y - 21z &= -5\\ -15x - 21y + 32z &= -50 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 12\\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 &= 48\\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -18 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 24\\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 54\\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 30 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 6\\ x_1 - x_2 + 5x_3 &= -2 \end{aligned}$

7.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

9. 100 kişilik bir grupta bulunan bayanların sayısı bayların sayısının yarısından 1 fazladır. Bu gruptaki bayan ve bayların sayısı nedir?

10. 50 milyar parası olan bir yatırımcı parasının tamanını yıllık getirisi %25, %30 ve %35 olan üç tür yatırım aracında değerlendiriyor. Yıl sonunda %25 ve %30 ile yatan miktarların toplam getirisi 8,4 milyar, %35 ile yatan miktarın ana para ile birlikte dönüşü 27 milyar ise, her bir yatırım aracına yatan miktar nedir?

ARZ - TALEP FONKSİYONLARI VE DENGE MİKTARLARI İÇİN DOĞRUSAL BİR MODEL

AMAÇ 3

Ekonomide arz ve talep arasındaki ilişkinin bir doğrusal denklem sistemiyle ifade edebileceğini görmek ve bu ilişkiyi matematiksel olarak irdelemektir.

Bir ticari malın piyasasında malın fiyatı, malın piyasadaki talebi ve piyasaya arzı arasında karmaşık bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi çeşitli matematiksel modellerle yaklaşık ifade etmek mümkündür. Malın fiyatını bağımsız değişken olarak kabul edersek, arz ve talep miktarlarını fiyatın fonksiyonları olarak ifade edebiliriz. Bu fonksiyonlara arz-talep fonksiyonları denir. Arz-talep fonksiyonları doğrusal olabileceği gibi, ikinci dereceden veya daha yüksek dereceden polinom türünde fonksiyonlar da olabilir. Biz burada bir malın pazarı için basit bir matematiksel model oluşturmak istiyoruz. Bunun için de arz-talep fonksiyonlarını bağımsız değişken fiyatın doğrusal fonksiyonları olarak kabul edeceğiz. Modelimizde arz ve talep miktarlarının eşit olduğu andaki fiyata **denge fiyatı**, denge fiyatına karşılık gelen arz-talep miktarına da **denge miktarları** diyeceğiz; ya da kısaca, denge fiyatı-denge miktarları ikilisine modelimizin **denge noktası** (denge durumu) adını vereceğiz. Böylece arz fonksiyonu, talep fonksiyonu ve denge durum arasındaki ilişkiyi bir doğrusal denklem sistemiyle ifade edebileceğiz.

Şimdi böyle bir matematiksel modeli ayrıntılara girerek oluşturalım.

Bir ticari malın (ürünün) bir zaman aralığı içinde pazara sunum (arz) miktarını q_s, pazarın talep miktarını q_d ve fiyatını p ile gösterelim. Şimdi arz-talep ve fiyat arasında basit dengeli bir matematiksel model oluşturmak istiyoruz. Modelimizin basitliği için p yi bağımsız değişken, q_s ve q_d yi de p nin doğrusal fonksiyonları olarak düşünelim. Fiyat arttıkça sunum artacağından ve talep de azalacağından, q_s yi p nin artan bir fonksiyonu, q_d yi de p nin azalan bir fonksiyonu olarak düşünebiliriz. Böylece a_1, a_2, b_1, b_2 pozitif katsayılar olmak üzere, q_s ve q_d fonksiyonları

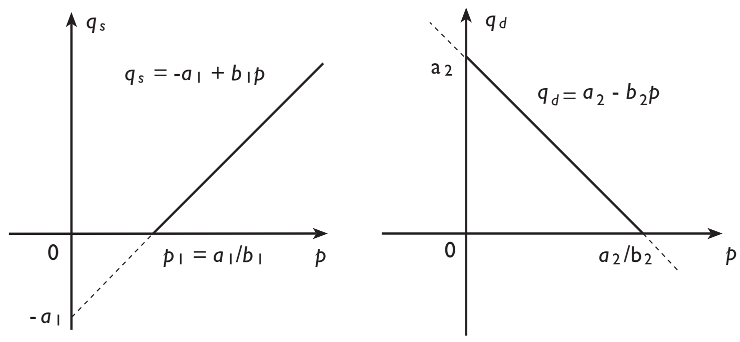
$$\begin{aligned} q_s &= -a_1 + b_1 p \\ q_d &= a_2 - b_2 p \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Modelimizin dengeli olması için bu sisteme bir de denge koşulu eklemeliyiz. Bu denge koşulu p nin belli bir değeri için talebin arza eşit olması, yani $q_d = q_s$ durumunda ortaya çıkar. Böylece modelimizin matematiksel ifadesi, a_1 , b_1 , a_2 , $b_2 > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} q_s &= -a_1 + b_1 p \\ q_d &= a_2 - b_2 p \qquad\qquad (1) \\ q_d &= q_s \end{aligned}$$

biçiminde üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir doğrusal denklem sistemi olur. Şimdi bu sistemin bir çözümünü analitik olarak aramaya girişmeden önce, geometrik olarak görmeye çalışalım. Bu nedenle, arz-talep analizinde olduğu gibi; yatay ekseni p, düşey ekseni q_s , q_d olan bir dik koordinat sisteminde arz fonksiyonu q_s nin ve talep fonksiyonu q_d nin grafiklerini çizelim:

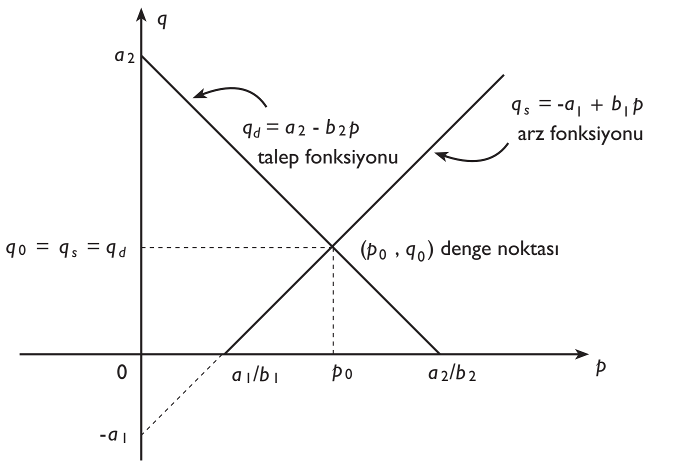
Arz fonksiyonu q_s artan olduğundan eğimi pozitif b_1 sayısıdır ve düşey ekseni kesim noktası $-a_1$ dir. Ancak fiyatın belirli bir p_1 ($p_1 = a_1 / b_1$) değerinden sonra sunum söz konusu olacağından, q_s nin grafiğinin başlangıç noktası p_1 olacaktır [Şekil 11.8(a)]. Talep fonsiyonu q_d azalan olduğundan eğimi negatif $-b_2$ sayısıdır ve düşey ekseni kesim noktası a_2 dir [(Şekil 11.8(b)]. Sistemin denge koşulu için $q_s = q_d = q$ yazıp, arz-talep fonksiyonlarının grafiklerini, düşey ekseni q olan aynı koordinat sisteminde çizersek, q_s ve q_d nin grafiklerinin kesim noktası denge fiyatı p_0 'a karşılık gelen q_0 için (p_0, q_0) denge noktası olur [Şekil 11.9].



(a) Doğrusal arz fonksiyonun grafiği

(b) Doğrusal talep fonksiyonun grafiği

Şekil 11.8



p_0 fiyatı için ürünün arz miktarı talep miktarına eşittir.

Şekil 11.9

Şimdi (1) denklem sisteminin çözümünü analitik olarak bulalım. Denge koşulu $q_s = q_d$ olduğundan, $q_s = q_d = q$ dersek, (1) sistemi

$$q = -a_1 + b_1 p \qquad (2)$$
$$q = a_2 - b_2 p$$

doğrusal denklem sistemine dönüşür. İki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bu sistemin çözümü için q yu yok edersek,

$$-a_1 + b_1 p = a_2 - b_2 p$$

veya

$$(b_1 + b_2)p = a_1 + a_2$$

olur. $b_1 + b_2 \neq 0$ olduğundan p ye göre çözüm, denge fiyatı p yi verir.

$$p = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$$

olur. p nin bu değeri (2) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılınca, denge miktarı

$$q = -a_1 + b_1 \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{-a_1b_1 - a_1b_2 + b_1a_1 + b_1a_2}{b_1 + b_2}$$
$$= \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1 + b_2}$$

bulunur. $b_1 + b_2 > 0$ olduğundan denge miktarı q nun pozitif olması için $a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, (1) sisteminin ekonomik olarak anlamlı olabilmesi için, sistemin $a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ koşulunu sağlaması gerekir.

Bu örnekteki (1) denklem sistemiyle verilen pazar modeline **doğrusal model** adı verilir.

Şimdi konuya ilişkin bazı örnekler verelim:

ÖRNEK 14

Arz-talep fonksiyonları aşağıdaki denklem sistemleriyle verilen pazar modellerinin denge noktası (p, q) yu bulunuz.

a) $q_s = -3 + 7p$, $q_d = 15 - 2p$

b) $q_s - 15p + 125 = 0$, $q_d + 3p - 37 = 0$

ÇÖZÜM

Her bir pazar modeli için $q_s = q_d$ olduğunda denge söz konusu olacaktır. Bu nedenle verilen her bir sistem için $q_s = q_d = q$ yazıp, denge fiyatı p ve denge miktarı q yu bulalım:

a) $q_s = q_d = q$ yazınca

$$-3 + 7p = q$$
$$15 - 2p = q$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden q yok edilirse,

$$-18 + 9p = 0$$

ve böylece $p = 2$ bulunur. p nin bu değeri $q = -3 + 7p$ denkleminde yerine yazılınca $q = 11$ bulunur. Denge noktası (2 , 11) olur.

b) Benzer olarak,

$$q - 15p + 125 = 0$$
$$q + 3p - 37 = 0$$

sisteminden q yok edilince

$$18p - 162 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden $p = \frac{162}{18} = 9$ bulunur.

Bu değer $q - 15p + 125 = 0$ denkleminde yerine yazılınca, $q - 15(9) + 125 = 0$ veya $q = 10$ bulunur. Denge noktası $(9\ ,\ 10)$ olur.

Yukarıdaki örneklerde sadece bir tür ticari malın pazarı için doğrusal bir model verildi. Aslında birbirleriyle ilişkili birden çok ticari mal birlikte düşünüldüğünde de bir doğrusal model yazılabilir. Basitlik için, diyelim ki, birbirleriyle ilişkili iki ticari mal için doğrusal bir model yazmak istiyoruz. Birinci malın fiyatı p_1, ikincisinin p_2 olsun. Bu malların arz-talep fonksiyonlarını da sırasıyla $q_{s_1}, q_{d_1}, q_{s_2}, q_{d_2}$ ile gösterelim. Parametrik olarak bu doğrusal modelleri, denge koşullarını da ekleyerek şöyle yazabiliriz:

$$\begin{aligned} q_{s_1} - q_{d_1} &= 0 \\ q_{s_1} &= a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 \\ q_{d_1} &= b_0 + b_1 p_1 + b_2 p_2 \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} q_{s_2} - q_{d_2} &= 0 \\ q_{s_2} &= c_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2 \\ q_{d_2} &= d_0 + d_1 p_1 + d_2 p_2 \end{aligned}$$

Şimdi bu duruma bir örnek olarak, ilişkili iki ticari malın pazarı için verilen doğrusal modellerin denge çözümlerini bulalım.

ÖRNEK 15

Birbirleriyle ilişkili iki ticari mal için arz ve talep fonksiyonlar aşağıdaki denklemlerle veriliyor. Bu mallar için denge fiyatlarını ve denge miktarlarını bulunuz.

1) $q_{d_1} = 12 - 2p_1 + p_2$, $q_{s_1} = -8 + 3p_1$ **2)** $q_{d_2} = 18 + p_1 - p_2$, $q_{s_2} = -6 + 2p_2$

ÇÖZÜM

Bir ticari malın pazarı için denge koşulu $q_s = q_d$ olmasıdır. Bu nedenle

$$q_{d_1} = q_{s_1} = q_1 \qquad \text{ve} \qquad q_{d_2} = q_{s_2} = q_2$$

yazınca, verilen (1) ve (2) denklem sistemleri

$$\begin{aligned} q_1 &= 12 - 2p_1 + p_2 \\ q_1 &= -8 + 3p_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q_2 &= 18 + p_1 - p_2 \\ q_2 &= -6 + 2p_2 \end{aligned}$$

sistemlerine dönüşür. Birinci sistemden q_1 ve ikinci sistemden q_2 yok edilince,

$$5p_1 - p_2 = 20 \qquad \text{ve} \qquad -p_1 + 3p_2 = 24$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemleri ortak çözelim:

$$5p_1 - p_2 = 20$$
$$-p_1 + 3p_2 = 24$$

İki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bu sistemin çözümü için birinci denklemi 3 ile çarpıp ikinci denklem üzerinde toplarsak,

$$14p_1 = 84 \qquad \text{veya} \qquad p_1 = 6$$

bulunur. Böylece $3p_2 = 24 + p_1 = 24 + 6 = 30$, $p_2 = 10$ olur. Şimdi bu denge fiyatlarını her bir sistemin arz ya da talep fonksiyonlarında yerine yazınca, her bir malın arz miktarı talep miktarına eşit olacaktır. Yani,

$$q_1 = 12 - 2p_1 + p_2 = 12 - 2(6) + 10 = 10$$
$$q_2 = 18 + p_1 - p_2 = 18 + 6 - 10 = 14$$

olacaktır. Böylece denge fiyatlar $p_1 = 6$, $p_2 = 10$ ve denge miktarları $q_1 = 10$, $q_2 = 14$ olarak bulunur.

SIRA SİZDE 3

1. Bir malın talep fonksiyonu $q_d = 75 - 2p$ ve arz fonksiyonu $q_s = -15 + 4p$ olarak veriliyor. Bu mal için,
   a) talebin sıfır olduğu,
   b) arzın sıfır olduğu,
   c) arz ve talebin eşit olduğu
   fiyatları belirleyiniz.
2. Arz ve talep fonksiyonları,
   $q_s = -5 + 3p$
   $q_d = 35 - p$
   olarak verilen bir malın hangi fiyatı için arz ve talep miktarları eşit olur? Denge miktarını belirleyiniz.
3. Arz-talep doğruları,
   $q_s = -13 + 12p$
   $q_d = 27 - 4p$
   olarak verilen bir modelin denge noktası nedir?
4. Birbirleriyle ilişkili iki malın arz ve talep fonksiyonları,
   $q_{d_1} = 54 - 2p_1 + p_2 \qquad q_{d_2} = 68 + 3p_1 - 2p_2$
   $q_{s_1} = 11p_1 - 16 \qquad q_{s_2} = 11p_2 - 18$
   olarak veriliyor. Her bir malın arz ve talebinin eşit miktarlarda olacağı denge fiyatlar var mıdır? Varsa denge değerleri nelerdir?

Kendimizi Sınayalım

1. $2x + 3y = 1$ ve $-3x + 2y = -8$ doğrularının kesim noktası aşağıdakilerden hangisidir?

a. (-1 , 2)
b. (2 , -1)
c. (1 , -1)
d. (-1 , 1)
e. (2 , 1)

2. $2x - 5y = 16$
$-x + 7y = -17$
doğrusal denklem sisteminin (x, y) çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a. (18, 4)
b. (23, 6)
c. (-4, -3)
d. (3, 2)
e. (3, -2)

3. $3x + 6y = 8$
$kx + 2y = 6$
doğrusal denklem sisteminin çözümsüz olması için k ne olmalıdır?

a. -2
b. -1
c. 1
d. 2
e. 3

4. $-5x + ky = -2$
$15x + y = 6$
doğrusal denklem sisteminin sonsuz çözümü olduğuna göre, k kaçtır?

a. -1
b. -1/3
c. 1/3
d. 1
e. 3

5. $2x + 3y - z - 1 = 0$, $-x + 5y + z - 14 = 0$ ve $3x + y + 2z - 5 = 0$
düzlemleri verilsin. Bu düzlemlerin kesim noktası aşağıdakilerden hangisidir?

a. (1 , 2 , 3)
b. (-1 , 2 , 3)
c. (-2 , 1 , 3)
d. (2 , 3 , 1)
e. (2 , 3 , -1)

6. $x + y - 2z = -2$
$2x - y - z = 5$
$x - 3y + 2z = 10$
doğrusal denklem sisteminde yer alan düzlemlerin arakesit doğrusunun parametrik denklemleri aşağıdakilerden hangisidir?

a. $x = t$
$y = -4 + t$
$z = -1 + t \quad (t \in \mathbb{R})$

b. $x = -1 + t$
$y = -3 + t$
$z = t \quad (t \in \mathbb{R})$

c. $x = -1 + t$
$y = 2t$
$z = t \quad (t \in \mathbb{R})$

d. $x = 1 + t$
$y = -1 + t$
$z = t \quad (t \in \mathbb{R})$

e. $x = 1 + t$
$y = t$
$z = 1 - t \quad (t \in \mathbb{R})$

7. $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$
$x_1 - x_2 + 3x_4 = 0$
$3x_2 - x_4 = 0$
doğrusal denklem sisteminin çözümü ile ilgili aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

a. Sistemin tek çözümü $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ dır.
b. Sistemin tek çözümü $x_1 = -8$, $x_2 = 1$, $x_3 = -10$, $x_4 = 3$ tür.
c. Sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır ve bu çözüm,
$x_1 = -\frac{8}{3}t,\ x_2 = \frac{1}{3}t,\ x_3 = -\frac{10}{3}t,\ x_4 = t \quad (t \in \mathbb{R})$
d. Sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır ve bu çözüm,
$x_1 = -8t,\ x_2 = t,\ x_3 = -10t,\ x_4 = t \quad (t \in \mathbb{R})$
e. Sistemin çözümü yoktur.

8. $x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -40$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 9$
$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20$
doğrusal denklem sisteminin (x_1, x_2, x_3) çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a. (3 , -7 , -2)
b. (1 , 3 , 2)
c.. (1 , -5 , 2)
d. (-1 , 5 , 4)
e. (-5 , 2 , 3)

9. Arz-talep fonksiyonları,

$q_s = -14 + 8p$

$q_d = 105 - 9p$

denklemleriyle verilen bir malın denge fiyatı ve denge miktarı aşağıdakilerden hangisidir?

a. $p = 3$, $q = 10$
b. $p = 10$, $q = 15$
c. $p = 11$, $q = 74$
d. $p = 11$, $q = 6$
e. $p = 7$, $q = 42$

10. Arz-talep fonksiyonları,

$q_{d_1} = 3 - p_1 + p_2$, $q_{s_1} = -4 + 5p_1$

$q_{d_2} = 14 + p_1 - 3p_2$, $q_{s_2} = -9 + 2p_2$

denklemleriyle verilen iki ticari mal için denge fiyatı ve denge miktarları aşağıdakilerden hangisidir?

a. $p_1 = 2$, $p_2 = 5$, $q_1 = 6$, $q_2 = 1$
b. $p_1 = 2$, $p_2 = 6$, $q_1 = 6$, $q_2 = 3$
c. $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $q_1 = 11$, $q_2 = 1$
d. $p_1 = 3$, $p_2 = 7$, $q_1 = 11$, $q_2 = 5$
e. $p_1 = p_2 = 5$, $q_1 = 21$, $q_2 = 1$

Biraz Daha Düşünelim

1. **a)** $3x - 4y = 6$
$x + 2y = 2$

b) $5x + 2y = 11$
$4x + 3y = 6$

doğrusal denklem sistemlerini grafik olarak çözünüz.

2. $3x + y = 2$, $5x - y = 4$ ve $-3x + 2y = y$, $8x = 6$

$$\begin{aligned} 3x + y &= 2 \qquad & -3x + 2y &= y \\ 5x - y &= 4 \quad , & 8x &= 6 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemlerinin eşdeğer olduğunu gösteriniz.

3.
$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 2 \\ x - y + 2z &= 9 \\ 2x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

sisteminin çözümünü bulunuz.

4. İki kapda bulunan %4 lük ve %9 luk tuz çözeltilerinden 50 litre %6 lık bir çözelti elde etmek için her bir kapdan ne kadar çözelti alınarak karıştırılmalıdır?

5. Bir nehirde seyreden bir bot, önce nehirin akışına ters yönde 6 saat yukarı doğru seyrettikden sonra geriye dönüyor ve 2 saatte hareket ettiği noktaya ulaşıyor. Sonra aşağı doğru 3 saat seyredip, tekrar yukarı doğru 8 saat seyrettiği halde başlangıç noktasına 4 km yaklaşıyor. Bu nehirin akış hızı nedir?

Pierre Fermat (1601 - 1665)

Avukat ve devlet adamı olan Fermat' ın bilinen en önemli çalışması Fermat' ın son teoremi olarak bilinen " $x^n+y^n=z^n$ ($n>2$) denkleminin pozitif tam sayılar için çözümü yoktur" biçiminde ifade edilen teoremdir. Bu teorem için Fermat, okuduğu bir kitabın kenarına şu notu yazmıştır: "Ben bu teoremin gerçekten çok güzel bir kanıtını yaptım, fakat bu sayfanın dar kenarına sığmaz." Oysa bu teoremin kanıtı matematikçileri yaklaşık 350 yıl uğraştırmıştır.