LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri için çok kullanılan yöntemlerden birisi integral dönüşümleridir ve bir integral dönüşümü

$$F(s)=\int_{\alpha}^{\beta} K(s,t)f(t)dt \qquad \textbf{(1)}$$

formundadır. Burada verilen bir 'f' fonksiyonu 'F' fonksiyonuna dönüşür ve F fonksiyonuna f in fonksiyon dönüşümü denir. K(s,t) ye çekirdek denir.

L(f(t))= $F(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ **(2)**

L(f(t)) veya F(s) e f fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir.
K(s,t)= e^{-st} dir.
Laplace dönüşümünün tanımından da görüldüğü gibi bu dönüşüm genelleştirilmiş integral(improper) görünümündedir. Bu nedenle genelleştirilmiş integral kavramını hatırlamak için bir örnek ve teorem verelim. Genelleştirilmiş integral sonlu aralıklar için integralin bir sınırı olarak tanımlanır

$\int_{a}^{\infty} f(t)dt=\lim_{A\to\infty}\int_{a}^{A} f(t)dt$ **A pozitif reel sayı**

Eğer integral her A>a için a dan A ya var ise ve A→∞ limiti mevcut ise genelleştirilmiş integral yakınsak , aksi takdirde ıraksaktır.

Örnek:

$\int_{0}^{\infty} e^{ct}dt=?$ **t>0**

$$\lim_{A\to\infty}\int_{0}^{\infty} e^{ct}dt=\lim_{A\to\infty}\frac{e^{ct}}{c}\Big|_{0}^{A}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{c}(e^{cA}-1)$$

c<0 için genelleştirilmiş integral yakınsaktır. c>0 ve c=0 için ıraksaktır.
Teorem 6.1.1

f fonksiyonu t≥a için parçalı sürekli fonksiyon, M pozitif sabit bir sayı ve eğer

|f(t)|≤ g(t) $\int_{M}^{\infty} g(t)dt$ **yakınsak ise** $\int_{a}^{\infty} f(t)dt$ **de yakınsaktır.**

Diğer yandan t≥M ve f(t)≥g(t)≥0 olmak üzere eğer $\int_M^\infty g(t)dt$ ıraksak ise $\int_a^\infty f(t)dt$ de ıraksaktır. Yukarıda (2) nolu denklemle verilen *L(f(t)) veya F(s)* *Laplace dönüşümünde genelleştirilmiş integral yakınsak olduğunda tanımlanmaktadır.*

Teorem 6.1.2:

1) keyfi bir pozitif 'A' sayısı için 0≤t≤A aralığında f fonksiyonu parçalı sürekli olsun

2) t≥M için |f(t)|≤K e^{at} olsun Bu eşitsizlikte K,M pozitif olmak üzere K,a,M reel sayılardır. Bu şartlar sağlanıyorsa

L(f(t))= $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ **dönüşümü s>0 için vardır.**

Örnek 1:

f(t)= 1, ***t*≥0 , L(1)=?**

Çözüm:

L(1)= $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}1dt = -\frac{e^{-st}}{s}$

$\lim_{A\to\infty} -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^A = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{e^{-sA}}{s}+\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}$ **1/s s>0**

Örnek 2:

f(t)= e ^{at}**, *t*≥0 , L(*e* ^{at})=?**

L(*e* ^{at})= $\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-(s-a)t}dt = \lim_{A\to\infty} -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_0^A$

$\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)A}-(-\frac{1}{s-a})\right)=$ **1/s-a s>a**

Örnek 3:

***f(t)= Sin(at), t≥0* , L(*Sin(at)*)=?**

F(s)=L(*Sin(at)*)= $\int_0^\infty e^{-st}\sin at dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\sin at dt$ **= s>a**

$$\begin{bmatrix} u = e^{-st} & du = -se^{-st}dt \\ dv = \sin at dt & v = -\frac{1}{a}\cos at \end{bmatrix}$$ **uv-∫vdu**

F(s)= $\lim_{A\to\infty}\frac{e^{-st}\cos at}{a}\Big|_0^A - \frac{s}{a}\int_0^A e^{-st}\cos at dt \begin{bmatrix} u = e^{-st} & du = -se^{-st}dt \\ dv = \cos at dt & v = \frac{1}{a}\sin at \end{bmatrix}$

sağ tarafa kısmi integrasyon uygulanırsa

F(s) $= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin at dt$ **=** $1/a - s^2/a^2 F(s)$

F(s)= L(*Sin(at)*) = $a/(s^2+a^2)$ **s>0 bulunur.**

Örnek 4:

f(t)=t L(t)=?

L(t)= $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} t dt \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^{-st} & v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{s}te^{-st}\Big|_\infty^0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = 0 + \frac{1}{s}\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

Ödev:

1- f(t)= t^2 **L(** t^2 **)=? L(** t^2 **)=** $2/s^3$

2- f(t)= t^3 **L(** t^3 **)=? L(** t^3 **)=** $6/s^4$

3- *f(t)= cos(at), t≥0* , L(cos*(at)*)= s/s^2+a^2

Laplace dönüşümü lineer bir operatördür gerçekten f_1 **ve** f_2 **fonksiyonlarını** $s>a_1, s>a_2$ **için Laplace dönüşümleri bulunsun. Burada s ,** a_1 **ve** a_2 **nin maximumundan büyük olmak üzere**

L($c_1f_1(t)+c_2f_2(t)$ **)=** $\int_0^\infty e^{-st}\left(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right)dt = c_1\int_0^\infty e^{-st} f_1(t)dt + c_2\int_0^\infty e^{-st} f_2(t)dt$

L($c_1f_1(t)+c_2f_2(t)$ **) =** c_1 **L(** $f_1(t)$ **)+** c_2 **L(** $f_2(t)$ **)**

lineer bir operatördür.

Örnek1:

L(sinhat)= L($\dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}$ **) =?**

$$= \frac{1}{2}\left[L(e^{at}) - L(e^{-at})\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-(-a)}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

Ödev:

L(coshat)=?

L(coshat)= L($\dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}$ **)** **L(coshat)=** $\dfrac{s}{s^2 - a^2}$

6.2.BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ ****

Laplace dönüşümü sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılır. Laplace dönüşümünü bu tür problemlere uygulamadan önce f', f'',.............,$f^n(t)$ fonksiyonlarının laplace dönüşümünü bilmeliyiz.

Teorem6.2.1:

f sürekli ve f' parçalı sürekli iki fonksiyon ($0 \le t \le A$ aralığında)olsun Ayrıca K,a,M sabitler olmak üzere

$|f(t)| \le Ke^{at}$, $t \ge M$ olsun. Bu takdirde

L[f(t)]=s L[f(t)]- f(0)-.....-

sağlanır.

Teorem6.2.2:

f sürekli ve f' parçalı sürekli iki fonksiyon ($0 \le t \le A$ aralığında)olsun Ayrıca K,a,M sabitler olmak üzere

$|f(t)| \le Ke^{at}$, $|f'(t)| \le Ke^{at}$,...........,$|f^{n-1}(t)| \le Ke^{at}$ $t \ge M$ **olsun**

Bu takdirde s>a için L[f(t)] vardır, ve

$$L[\, f^n(t)\,] = s^n L[\, f(t)\,] - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$$

L[f(t)]= L[y(t)] ile gösterirsek

$L[\ y^n(t)\ ]= s^n\ L[\ y(t)\ ]-s^{n-1}y(0)-....-sy^{n-2}(0)-\ y^{n-1}(0)$ GENEL DURUM

$L[y^{''}]= s^2\ L[\ y(t)\ ]-sy(0)-y^{'}(0)$
$L[y^{'}]= s\ L[\ y(t)\ ]-y(0)$
$L[y]= L[y]=$

y(0),y'(0) karşılıkları dif denklemde yerlerine konulur ve L[y(t)] çekilerek Laplace dönüşümü uygulanır elde edilen ifadeler toplanarak genel çözüm elde edilir.

ÖRNEK 1:

y''+y=sin2t , y(0)=2, y'(0)=1 başlangıç koşullarını sağlayan diferansiyel denklemi çözünüz.

çözüm:

$L(y^{''})+L(y)=L(\sin 2t)$
$L(y^{''})= s^2\ L(y)-sy(0)-\ y^{'}(0)$
$L(y)= L(y)$
her iki tarafın laplace dönüşümü alınır, başlangıç koşulları yerine konulur y(0)=2, y'(0)=1, L(y) çekilirse $L(y^{''}+y)= L(\sin 2t)$

$s^2\ L(y)-sy(0)-\ y^{'}(0)+ L(y)= 2/(s^2+4)$

$s^2\ L(y)-2s-\ 1+ L(y)= 2/(s^2+4)$
$L(y)[s^2+1] =2s+1+\dfrac{2}{s^2+4}$

$L(y)=2s^3+s^2+8s+6/(s^2+1)(s^2+4)$ bulunur.

Bu ifadeyi basit kesirlere ayırırsak

$L(y)=\dfrac{as+b}{s^2+1}+\dfrac{cs+d}{s^2+4}=\dfrac{(as+b)(s^2+4)+(cs+d)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$

ve iki ifadenin paydaları eşitlenirse

$2s^3+s^2+8s+6=(a+c)s^3+(b+d)s^2+(4a+c)s+(4b+d)$

a+c=2	**b+d=1**	**a=2**	**c=0**
4a+c=8	**4b+d=6**	**b=5/3**	**d=-2/3**

y(s)= $\frac{2s}{s^2+1}+\frac{5/3}{s^2+1}-\frac{1/3*2}{s^2+4}$

Laplace dönüşüm tablosundan

$$y=\phi(t)=2\cos t+5/3\ \sin t-1/3\sin 2t$$

bulunur.

6.3 BASAMAK FONKSİYONLARI

Birim Basamak Fonksiyonu(Heaviside Function)

$$u_c(t)=\begin{cases} 0 & c>t \\ 1 & t\geq c \end{cases}$$ şeklinde tanımlanmaktadır.

$u_c(t)$fonksiyonunun Laplace dönüşümü:

$$L(u_c(t))= =\int_0^\infty e^{-st}u_c(t)dt=\int_c^\infty e^{-st}u_c(t)dt=\frac{e^{-cs}}{s} \qquad s>0 \text{ dır.}$$

$t\geq 0$ için tanımlı, verilen f(t) fonksiyonu için, ilgili g(t) fonksiyonu birim basamak fonksiyonu yardımı ile,

$$y=g(t)=\begin{cases} 0 & c>t \\ f(t-c) & t\geq c \end{cases} \qquad g(t)=u_c(t)f(t-c)$$

dır.

Teorem6.3.1: Eğer s >a≥ 0 için

F(s)=L(f(t)) var ve c pozitif bir sayı ise

$$L(u_c(t)f(t-c))=e^{-cs}\,L(f(t))=e^{-cs}\,F(s) \qquad s>a \text{ dır.}$$

Tersine eğer $f(t)=L^{-1}(F(s))$ ise buradan

$$u_c(t)f(t-c)=L^{-1}\,(e^{-cs}\,F(s)) \text{ dır.}$$

ÖRNEK 1:

$$f(t)=\begin{cases} \sin t & 0\leq t\leq \pi/4 \\ \sin t+\cos(t-\pi/4) & t\geq \pi/4 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ise} \quad L(f(t))=?$$

f(t) fonksiyonu 2 fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabilir

f(t)=sint+g(t)

$$g(t)=\begin{cases} 0 & t<\pi/4 \\ \cos(t-\pi/4) & t\geq \pi/4 \end{cases}$$

g(t) fonksiyonu da

$$u_{\pi/4}(t)=\begin{cases} 0 & t<\pi/4 \\ 1 & t\geq\pi/4 \end{cases}$$ şeklinde tanımlanmaktadır.

olmak üzere

Böylece **$g(t)= u_{\pi/4}(t) \cos(t-\pi/4)$ olur ve** Laplace dönüşümünün lineerliğinden

$L[f(t)]= L[\sin t]+L[u_{\pi/4}(t) \cos(t-\pi/4)]= L[\sin t]+e^{-(\pi/4)S}L(\cos t)$

$$\frac{1}{s^2+1}+e^{-(\pi/4)s}\frac{s}{s^2+1}=\frac{1+se^{-(\pi/4)s}}{s^2+1}$$

ÖRNEK2:

$F(s)=(1-e^{-2s})/s^2$ in ters dönüşümünü bulunuz.

Ters dönüşümün lineerliğinden; **$L^{-1} (e^{-cs} F(s)) =u_c(t)f(t-c)$ ile**

$f(t)= L^{-1}(F(s))= L^{-1}((1-e^{-2s})/s^2)= L^{-1}(1/s^2)- L^{-1}(e^{-2s}/s^2)=t - u_2(t)(t-2)$

$$f(t)=\begin{cases} t & 0\leq t<2 \\ 2 & t\geq 2 \end{cases}$$ şeklinde bulunur.

Teorem 6.3.2:

$s>a\geq 0$ için $F(s)=L(f(t))$ var ve c sabit ise;

$L(e^{ct} f(t))=F(s-c)$, $s> a+c$ sağlanır.

Tersine, eğer $f(t)= L^{-1}(F(s))$ ise

$e^{ct} f(t) = L^{-1}(F(s-c))$ dır.

ÖRNEK

$G(s)=1/(s^2-4s+5)$ in ters dönüşümünü bulunuz. $L^{-1}(G(s))=?$

çözüm:

$G(s)=1/(s-2)^2+1$ $=F(s-2)$ yazabiliriz. Burada $F(s)=(s^2+1)^{-1}$ dir

$L^{-1}(F(s))=\sin t$ olduğundan <u>teorem6.3.2 den</u>

g(t)= L^{-1}(G(s))= L^{-1}(F(s-2))= e^{2t}sint $\qquad e^{at}\sin bt = \dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$

6.4. SÜREKSİZ KUVVET FONKSİYONLARI İLE DİFERANSİYEL DENKLEMLER

örnek:

$$g(t)=u_5(t)-u_{20}(t)=\begin{cases} 1 & 5\le t<20 \\ 0 & 0\le t<5 \text{ veya } t\ge 20 \end{cases}$$

olmak üzere

2y''+y'+2y=g(t), y(0)=0,y'(0)=0 diferansiyel denklemin çözümünü bulunuz.

Diferansiyel denklemin Laplace dönüşümü

$2s^2y(s)-2sy(0)-2y'(0)+sy(s)-y(0)+2y(s)=(L(u_5(t))-L(u_{20}(t)))=(e^{-5s}-e^{-20s})/s$

Başlangıç değerleri yerlerine konup **y(s)** çekilirse;

$$\mathbf{y(s)}=\frac{e^{-5s}-e^{-20s}}{s(2s^2+s+2)}$$

bulunur.

y=ϕ(t) yi bulmak için y(s) si daha basit olarak y(s)= (e^{-5s}-e^{-20s})H(s) şeklinde yazarız. Buradan

H(s)= $\dfrac{1}{s(2s^2+s+2)}$ **dır. Buradan da eğer**

L(t)=L^{-1}(u(s)) ise y=ϕ(t)=u_5(t)h(t-5)-u_{20}(t)h(t-20) elde edilir.

$e^{-5s}\mu$(s) ve $e^{-20s}\mu$(s) nın ters dönüşümlerini yazmak için (*Teorem3) ü kullanırız. Sonuç olarak h(t) bulmak için H(s) i basit kesirlere ayırırsak*

H(s)= $\dfrac{a}{s}+\dfrac{bs+c}{2s^2+s+2} \Rightarrow a=1/2, b=-1, c=-1/2$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte yerlerine konur

H(s)= $\frac{1/2}{s}-\frac{s+1/2}{2s^2+s+2} \Rightarrow = \frac{1/2}{s}-\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(s+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}$ **dönüşüm tablosundan yararlanılarak**

h(t)= $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[e^{-t/4}\cos(\frac{\sqrt{15}}{4}t)+(\frac{\sqrt{15}}{15})e^{-t/4}\sin(\frac{\sqrt{15}}{4}t)\right]$

6.5.İmpulse Fonksiyonları

δ dirac delta olarak isimlendirilir ve laplace dönüşümü:

$$\mathbf{L(\delta(t-t_0))=e^{-st_0}\quad t_0>0 \quad dir.}$$

Örnek 1:

ay''+by'+cy=g(t) (a,b,c sabit)

g(t)= 2δ(t-7)+5δ(t+3) fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$\mathbf{L(\delta(t-t_0))=e^{-st_0}\quad idi.}$$

L (g(t))=2 L(δ(t-7))+5 L(δ(t+2))= $\mathbf{2e^{-7s}+5e^{-(-3s)}}$

$\mathbf{= 2e^{-7s}+5e^{3s}}$ **bulunur.**

Örnek 2:

$y''+y'+y=\delta(t-2) \quad y(0)=0$ **,** $y'(0)=0$ **başlangıç değer problemini çözünüz.**

Laplace dönüşümünün lineerliğinden

$$L[y'']+L[y']+L[y]=L[\delta(t-2)]=e^{-2s}$$

$$L[y'']=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$$
$$L[y']=sY(s)-y(0) \qquad s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-y(0)+Y(s)=e^{-2s}$$
$$L[y]=Y(s)$$
$$s^2Y(s)-s.0-0+sY(s)-0+Y(s)=e^{-2s}$$

$$Y(s)[s^2+s+1]=e^{-2s}, \qquad Y(s)=e^{-2s}\frac{1}{s^2+s+1}=e^{-2s}F(s)$$

olur. Önce F(s) nin laplace dönüşümü bulunursa

$$f(t)=L^{-1}(F(s))= L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+s+1}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right] = L^{-1}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{4}} * \sqrt{\frac{4}{3}}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\sqrt{\frac{3}{4}})^2}\right] =$$

$$e^{at}\sin bt = \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \qquad \mathbf{f(t)} = \sqrt{\frac{4}{3}}L^{-1}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{(s-(-\frac{1}{2}))^2+(\sqrt{\frac{3}{4}})^2}\right] = \sqrt{\frac{4}{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\sqrt{\frac{3}{4}}t$$

Ayrıca

f(t)= L^{-1}(F(s)) ise

e^{ct} f(t) = L^{-1}(F(s-c)) dönüşümü dikkate alınırsa **c=-1/2 olur**

Diğer taraftan

f(t)=L^{-1}(F(s)) ise

u_c(t)f(t-c)= L^{-1} (e^{-cs} F(s))idi.

y= L^{-1} (Y(s))= L^{-1} (e^{-2s} F(s))=u_2(t) $\sqrt{\frac{4}{3}}e^{-\frac{1}{2}(t-2)}\sin\sqrt{\frac{3}{4}}(t-2)$

Ödev:

2y’’+y’+2y=δ(t-5)   y(0)=0,   y’(0)=0

6.6. Konvolüsyon İntegrali

Bazen bir ***Y(s) laplace dönüşümü, bilinen f(t) ve g(t)*** *fonksiyonlarının laplace dönüşümü olan F(s) ve G(s) nin çarpımı olarak verilebilir.*
Y(s) = F(s)* G(s). *Bu durumda Y(s) ye f ve g fonksiyonlarının çarpımının laplace dönüşümü olarak bakılabilir.*

Teorem 6.6.1. (Konvolüsyon Teoremi)

Eğer F(s)=L(f(t)) ve G(s)=L(g(t)) s>a≥0 için var ise,

y(t))= F(s) G(s)= L(y(t)), s>a **(1)**

Burada y(t)

y(t)=$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$ **(2)**

Buradaki y(t) fonksiyonu *f(t) ve g(t) nin konvolüsyonudur.ve (2) deki integraller konvolüsyon integralleridir.*

Örnek1

(f*1)(t)= $\int_0^t f(t-\tau)1d\tau = \int_0^t f(t-\tau)d\tau.$

Eğer f(t)= cost ise

(f*1)(t)= $\int_0^t \cos(t-\tau)d\tau = -\sin(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}$ =-sin0+ sint= sint.

(f*1)(t) $\neq f(t)$ *dir.*

Örnek2

H(s)= $\dfrac{a}{s^2(s^2+a^2)}$ *ters fonksiyonunu bulunuz* $L^{-1}(H(s))=?$

H(s) yi s^{-2} *ve* $\dfrac{a}{(s^2+a^2)}$ *gibi düşünerek tablodan bakılırsa bunlar t ve sinat nin dönüşümleridir. Teorem 6.6.1 den*

y(t)=$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t (t-\tau)\sin a\tau d\tau = \dfrac{at-\sin at}{a^2}$

Diğer bir yolda önceden çözdüğümüz gibi H(s) yi basit kesirlere ayırarak ta bulabilirdik.

Örnek3

$L^{-1}(H(s)) = L^{-1}(\dfrac{1}{s(s^2+16)}) = L^{-1}(F(s)G(s))$ *fonksiyonunun ters-laplace dönüşümünü konvolüsyon teoremini kullanarak bulunuz.*

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+16)} = \frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+16)} = F(s)G(s)$$

şeklinde yazılırsa

$$f(t) = L^{-1}(\frac{1}{s}) = 1, g(t) = L^{-1}(\frac{1}{s^2+16}) = \frac{1}{4}\sin 4t$$

olduğu dikkate alınarak

$$L^{-1}(H(s)) = L^{-1}(\frac{1}{s(s^2+16)}) = L^{-1}(F(s)G(s))$$

$=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$ integrallerinden işleme uygun olanı seçilerek

h(t)= $L^{-1}(\frac{1}{s(s^2+16)}) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t (1)*\frac{1}{4}\sin 4\tau)d\tau.$

h(t)= $\frac{1}{4}(-\cos 4\tau)\Big|_0^t = \frac{1}{4}(1-\cos 4t)$

Örnek4

y''+4y=g(t) y(0)=3, y'(0)=-1 başlangıç değer problemini çözünüz.

s^2 Y(S)-3s+ 1+4 Y(s)= G(s)

veya

Y(s)=$\frac{3s-1}{s^2+4}+\frac{G(s)}{s^2+4}$ **Y(s)=**$3\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}+\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}G(s)$ **tablodan**

Bu denklemin üçüncü terimindeki G(s) nin çarpanına

F(s)=$\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}$

denirse

$$Y(s) = 3\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}+F(s)G(s)$$

bu ifadenin her iki tarafının ters laplace dönüşümü alınırsa ve ters laplace dönüşümünün lineerliği dikkate alınarak

$$L^{-1}(Y(s)) = 3L^{-1}(\frac{s}{s^2+4})-\frac{1}{2}L^{-1}(\frac{2}{s^2+4})+L^{-1}(F(s)G(s))$$

ayrıca $L^{-1}(F(s)G(s))$ konvolüsyon ile bulunabileceğinden

$L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2}L^{-1}(\frac{2}{s^2+4})$ olduğu dikkate alınıp Laplace tablosundan

y(t)= 3cos2t-$\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-\tau)g(\tau)d\tau$