14

Doğrusal Programlama

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra:

- *Uygulamada çok kullanılan bir eniyileme tekniği olan doğrusal programlama yönteminin ne olduğunu,*
- *İşletme yönetiminde çok karşılaşılan maliyet ve kâr problemlerinin doğrusal denklemlerle nasıl ifade edileceğini*
- *Basit grafik yöntemle doğrusal programlama modellerinin nasıl çözülebileceğini göreceksiniz.*

İçindekiler

- *Doğrusal Programlamanın Tanımı*
- *Bir Maliyet veya Kâr Probleminin Doğrusal Programlama Yöntemi ile Çözülmesi İçin Gerekli Olan Koşullar*
- *Verilen Problemin Denklemlerle Belirlenen Bir Model Haline Getirilmesi*
- *Doğrusal Programlama Modelinin Basit Grafik Yöntemle Çözülmesi*

DİKKAT

- ***Doğrusal programlama ünitesine başlamadan önce doğrusal denklem sistemleri ve matris ile ilgili üniteleri yeniden gözden geçiriniz.***
- ***Verilen problemlerde nelerin değişken olarak alınacağını belirleyiniz.***
- ***Belirlenen değişkenler arasındaki ilişkileri kurarken nelerin değişkenlerin katsayıları olacağını belirleyiniz.***
- ***Değişkenler arasındaki ilişkilerin eşitlik veya eşitsizlik şeklinde olması halinde çözüm yöntemi değişmektedir. Bu bakımdan ilişkinin şeklinin ne olacağını iyice belirleyiniz.***

Giriş

Bu günün işletme yöneticileri karar verirken iş deneyimlerinin ve kuramsal bilgilerini yanısıra matematiksel yöntemlerden de yararlanmaktadırlar.

Bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler, kurulan matematiksel modellerin çözümünü kolaylaştırmaktadır. Bu bakımdan da sözkonusu yöntemler çok daha fazla kullanılmaktadır. Örneğin, bir pamuklu dokuma fabrikasında, pamuktan dokumaya kadar olan süreçte bütün üretim noktalarında devamlılığı sağlamak isteyen bir yönetici bunu ancak matematiksel yöntemlerle sağlayabilir.

Doğrusal programlama da yukarıda belirttiğimiz konularda karar vermeyi kolaylaştıran matematiksel yöntemlerden biridir. Bu ünitede doğrusal programlama yöntemi tanıtılacak ve basit çözüm yöntemleri tanıtılacak ve basit çözüm yöntemleri verilecektir. Burada önemli olan verilen problemin bileşenlerine ayrılması ve modelin kurulmasıdır. Model kurulduktan sonra çözümü bilgisayarda kolayca yapılmaktadır.

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA NEDİR?

AMAÇ 1

Uygulamada çok kullanılan bir eniyileme olan doğrusal programlama yönteminin ne olduğunu öğrenebilmektir.

Bir matematikçiye doğrusal programlamanın ne olduğu sorulursa alınacak yanıt "Doğrusal bazı sınırlandırmalar altında doğrusal bir fonksiyonu maksimum veya minimum yapan değerleri bulma yöntemidir." olacaktır. Aynı soru bir iktisatçıya sorulursa "Sınırlı olanakların optimal dağılımında kullanılan bir tekniktir." olacaktır. İşletme biliminde doğrusal programlama nedir diye sorulursa "Önceden belirlenmiş bir amacın, örneğin minimum masraf veya maksimum kârı, gerçekleştirmeye yarayan bir tekniktir." olacaktır.

BİR PROBLEMİN DOĞRUSAL PROGRAMLAMAYLA ÇÖZÜLEBİLMESİ İÇİN GEREKLİ KOŞULLAR

Değişkenlerin hangi özellikleri sağlaması halinde doğrusal programlama yöntemi uygulanabilir?

Bir problemin doğrusal programlama yöntemiyle çözülebilmesi için, problemde aşağıdaki koşulların bulunması gerekir:

- Problemi meydana getiren unsurların rakamla ifade edilebilmesi gerekir. Bu özellik rakamla ifade edilemeyen unsurları içeren problemler bu yöntemle çözülemeyeceğini göstermektedir. Örneğin, fayda optimizasyonu gibi.
- Değişkenler arasında alternatif seçim olabilmelidir. Maksimum veya minimum yapılacak fonksiyondaki değişkenler arasında bir seçim yapılabilmelidir. Örneğin, sadece bir makinaya veya insan emeğine ihtiyaç duyan bir üretim probleminde seçim sözkonusu olmadığı için böyle bir problem, doğrusal programlama yöntemiyle çözülemez.
- Problemde öngörülen değişkenler arasında kurulan bağıntılar doğrusal olmalıdır.

Doğrusal denilince, problemde değişkenler arasında bulunan eşitlik ve eşitsizliklerin birinci dereceden ilişkileri olmalıdır. Bu durum bir üretim problemi üzerinde açıklanacaktır.

ÖRNEK 1

Bir işletmede bir A malının bir biriminin üretilmesi için 4 dakikalık bir zamana gerek varsa, bu maldan 100 birim üretmek için 400 dakika zamana ihtiyaç olacaktır. Burada zaman ile üretilen miktar arasındaki ilişki doğrusaldır.

$$4A = 400$$

Bu işletmede A malı ile birlikte bir B malının da üretildiğini varsayalım. B malının üretiminin bir birimi için 3 dakikalık zamana gerek olduğunu ve bu iki malın üretimi için 400 dakikalık zamana ihtiyaç varsa aradaki ilişki,

$$4A + 3B = 400$$

olacaktır.

Yukarıdaki örnekten herhangi bir malın bir biriminin üretimi için kullanılacak zaman diğer birimlerin üretiminden az veya çok ise buradaki ilişki doğrusal bir ilişki olmayacaktır.

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA YÖNTEMİYLE ÇÖZÜLECEK PROBLEMİN BİR MODEL HALİNE GETİRİLMESİ

Verilen bir problemin doğrusal programlama tekniğiyle çözülebilmesi için aşağıdaki yol izlenir.

Problemin Tanıtılması

İşletme ve iktisat problemlerinde standartlar (zaman, hammadde, kâr ve birim maliyetler) tanıtılır. Üretimin yapılabilmesi için üretim teknikleri ve bu tekniklerin her birinin uygulanmasıyla üretilebilecek mamullerin birim maliyetleri (veya her birimin satışından elde edilecek kâr) hesaplanır.

Matematiksel Modelin Kurulması

Bu aşamada aşağıdaki işlemler uygulanır:

Değişkenlerin Belirlenmesi

İşletme problemlerine uygulanan doğrusal programlama modellerinde, genellikle, üretim hacmi, makinaların çalışma süreleri, üretimde kullanılan hammadde miktarları ve üretim için yapılan giderler değişken olarak alınır.

Modelin Genel Olarak Gösterilmesi

Genel olarak modele girecek değişkenler $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ ile, bu değişkenler arasındaki bağlantıları kuran parametreler ise $a_{11} , a_{12} , \ldots , a_{1n} , \ldots a_{mn}$ şeklinde gösterilir. Ayrıca, verilmiş sabit değerler (makina kapasiteleri, eldeki hammadde miktarları ve iş gücü gibi) $b_1 , b_2 , \ldots , b_m$ ile gösterilir. Değişkenler arasındaki ilişkiler genel olarak aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots \; a_{1j}\, x_j + \ldots + a_{1n}\, x_n \leq b_1 \\
a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots \; a_{2j}\, x_j + \ldots + a_{2n}\, x_n \leq b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots \; a_{mj}\, x_j + \ldots \; a_{mn}\, x_n \leq b_m
\end{array}
$$

Buradaki değişkenler pozitif ve sıfır değeri alırlar. Ancak, bu değişkenler negatif değer alamazlar.

Ayrıca, modelde amaç fonksiyonu denilen, modeldeki bütün değişkenleri içinde bulunduran, değişkenlerin katsayıları birim kârlar veya maliyetler olan, maksimum veya minimum yapılması istenen bir fonksiyon da vardır.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots \; c_nx_n$$

Bu fonksiyona, amaç fonksiyonu denir.

Aşağıdaki örnekte verilen veriler yardımıyla modelin nasıl kurulacağı açıklanacaktır.

ÖRNEK 2

Bir işletme A ve B olmak üzere iki çeşit mal üretmektedir. A ve B mallarının üretimi için izlenebilir iki üretim tekniği vardır. Aşağıdaki tabloda sözkonusu iki malın üretim teknikleri ile birer birimlerinin satışından elde edilebilecek kârlar gösterilmiştir.

	A Malı I. Teknik	A Malı II. Teknik	B Malı I. Teknik	B Malı II. Teknik	Kapasite
İşgücü (saat)	40	40	40	40	600
Hammadde X	8	6	4	3	140
Hammadde Y	4	5	11	16	120
Birim kâr	6 TL	5,5 TL	9 TL	8 TL	
Değişkenler	x_1	x_2	x_3	x_4	

Yukarıdaki verilerden hangi maldan hangi üretim tekniğiyle ne kadar mal üretelim ki bu firmanın kârı maksimum olsun?

ÇÖZÜM

Verilen problemdeki değişkenler arasındaki ilişkiler aşağıda verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
40x_1 + 40x_2 + 40x_3 + 40x_4 &\leq 600 \\
8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 140 \\
4x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 &\leq 120
\end{aligned}
$$

Ayrıca, bütün değişkenleri içinde bulunduran ve katsayıları bu problemde birim kârlar olan amaç fonksiyonu da yazılmalıdır.

$$Z = 6x_1 + 5{,}5x_2 + 9x_3 + 8x_4$$

Yukarıda verilen problemde değişkenler arasındaki ilişkilerde kurulan eşitsizlik sisteminde eşitsizlikler belirli bir değerden küçük eşitsizlikler olarak verilmiştir. Bazı işletme problemlerinde,

$$
\begin{aligned}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n &= b_1 \\
a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n &\geq b_2
\end{aligned}
$$

gibi eşitlik ve eşitsizlikler de bulunabilir. Aşağıda bu gibi ilişkileri de içeren bir problem verilecektir.

Bazı problemlerde değişkenler arasındaki ilişkiler eşitlik veya büyük eşitsizlik şeklinde olabilir.

ÖRNEK 3

Bir işletme A malından 200 birim ve B malından 300 birim üretmek istemektedir. Sözkonusu iki malın üretimi iki üretim departmanından geçerek yapılabilmektedir.

Birinci departmanda A ve B malları bir makina kullanılarak üretilmektedir. Bu makinada bir birim A malı 2 saatte, bir birim B malı ise 4 saatte üretilmektedir. Sözkonusu makinanın bu malların üretiminde kullanılacak 1700 saat zamanı vardır.

İkinci departmanda A ve B mallarının üretimi için iki makina kullanılmaktadır. Birinci makinanın kullanılması halinde A malının bir biriminin üretimi 4 saat, B malının bir biriminin üretimi 7 saat almaktadır. Bu departmandaki ikinci makinanın kullanılması halinde bir birim A malının üretiminin 10 saat, bir birim B malının üretiminin 12 saat aldığı bilinmektedir. Birinci makinanın bu malların üretiminde kullanılabilecek 1000 saati, ikinci makinanın da 3000 saati vardır. Ayrıca birinci makinanın 500 saat fazla çalışma olarak kullanılabilir zamanı vardır.

Birinci departmanda kullanılacak makinanın bir saatlik maliyeti 3000 TL dır. İkinci departmanda birinci makinanın bir saatlik maliyeti 3000 TL, ikinci makinanın ise 2000 TL sıdır.

Eğer makinalar fazla mesaili çalıştırılırsa saat başına 450 TL lık artış olmaktadır. Fazla mesai uygulaması ikinci departmandaki birinci makinada uygulanmaktadır.
Bütün giderlerin minimum olacağı üretim miktarlarının bulunması istenmektedir.

ÇÖZÜM

Önce bu problemde kullanılacak değişkenler tanımlanacaktır:

x_1 : Birinci departmandan ve ikinci departmanda normal zamanda birinci makina kullanılarak üretilecek A malı miktarı

x_2 : Birinci departmandan ve ikinci departmandaki birinci makina kullanılarak fazla mesai kullanılarak üretilecek A malı miktarı

x_3 : Birinci departmandan ve ikinci departmandaki ikinci makinada üretilecek A malı miktarı

x_4 : Birinci departmandan ve ikinci departmanda birinci makinada normal zamanda üretilen B malı miktarı

x_5 : Birinci departmandan ve ikinci departmanda birinci makinada fazla mesai yapılarak üretilecek B malı miktarı

x_6 : Birinci departmandan ve ikinci departmandaki ikinci makinadan geçerek üretilecek B malı miktarı

Bu değişkenler için birim maliyetler,

x_1	için	18000	TL
x_2	için	19800	TL
x_3	için	26000	TL
x_4	için	33000	TL
x_5	için	36150	TL
x_6	için	36000	TL

olarak bulunur.

Yukarıda belirlenen değişkenler arasındaki ilişkiler aşağıda gösterilmiştir.

Birinci departman	$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 \leq 1700$
İkinci departman birinci makina (normal zaman)	$4x_1 + 7x_4 \leq 1000$
İkinci departman birinci makina (fazla mesai)	$4x_2 + 7x_5 \leq 500$
İkinci departman ikinci makina	$10x_3 + 12x_6 \leq 3000$
Planlanan A mamulü miktarı	$x_1 + x_2 + x_3 = 200$
Planlanan B mamulü miktarı	$x_4 + x_5 + x_6 = 300$

Amaç Fonksiyonu

$$Z = 18000\ x_1 + 19800\ x_2 + 26000\ x_3 + 33000\ x_4 + 36150\ x_5 + 36000\ x_6$$

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4\ ,\ x_5\ ,\ x_6 \geq 0$$

Doğrusal Programlama Modelinin Çözüm Yöntemleri

Doğrusal programlama modelleri üç yöntemle çözülebilmektedir. Bu yöntemler:

a) Grafik Yöntemi
b) Simpleks Yöntemi
c) Matris Yöntemi

olmaktadır.

DİKKAT

Bu ünitede doğrusal programlama modellerinin grafik yöntemle nasıl çözülebileceğini örneklerle açıklayacağız.

ÖRNEK 4

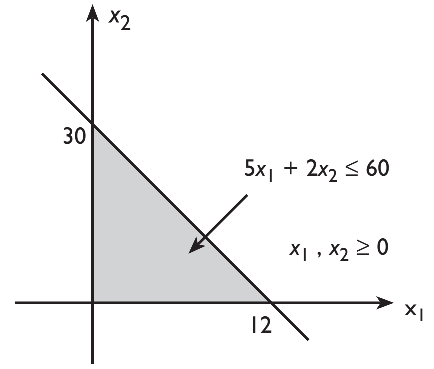
Bir firma A ve B olmak üzere iki çeşit mal üretmektedir. Bu iki çeşit mal bir üretim departmanındaki bir makinadan geçerek üretilmektedir. A malının bir biriminin üretimi için 5 saat, B malının bir birimi için 2 saat zaman harcanmaktadır. Sözkonusu departmandaki makinanın A ve B mallarının üretiminde kullanılabilecek 60 saat zamanı vardır. Değişkenler ile aralarındaki ilişkileri belirleyin.

ÇÖZÜM

Bu problemde A malının üretim miktarı x_1, B malının üretim miktarı x_2 ile gösterilirse, x_1 ve x_2 değişkenleri arasındaki ilişki,

$$5x_1 + 2x_2 \leq 60$$

olacaktır. Bulunan bu ilişkinin grafiği ve çözüm alanı aşağıda Şekil 14.1'de gösterilmiştir.



Şekil 14.1

Yukarıda vermiş olduğumuz örnekte A ve B mallarının üretimi için, ikinci bir departmandaki makinalarında kullanılması gerektiğini varsayalım. Bu departmanda bir birim A malı üretmek için 5 saat, bir birim B malı üretmek için ise 4 saat zamana ihtiyaç vardır. İkinci departmanda bu üretim için kullanılabilecek 80 saat zaman olduğunu varsayarsak, x_1, x_2 değişkenleri arasında ikinci departmandaki kısıtlamayı gösteren ilişki,

$$5x_1 + 4x_2 \leq 80$$

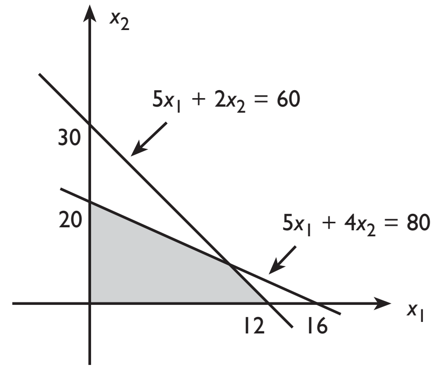
olacaktır.

Bu problemle ilgili kısıtlayıcılar topluca,

$$\begin{aligned} &5x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ &5x_1 + 4x_2 \leq 80 \\ &x_1 \geq 0 \\ &x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

olarak gösterilir. Bu eşitsizlik sistemi ile, eşitsizliklerin çözüm alanlarının kesişimi aşağıda Şekil 14.2 de şekilde gösterilmiştir.

Değişkenler arasındaki ilişkileri gösteren doğrusal denklemlerin grafikleri çizildiğinde, şekilde görülen uygun çözüm alanı belirlenir.



Şekil 14.2

Şekilde görülen taralı alan yukarıdaki bütün eşitsizliklerin ortak çözüm alanıdır. Bu alana **uygun çözüm alanı** denir.

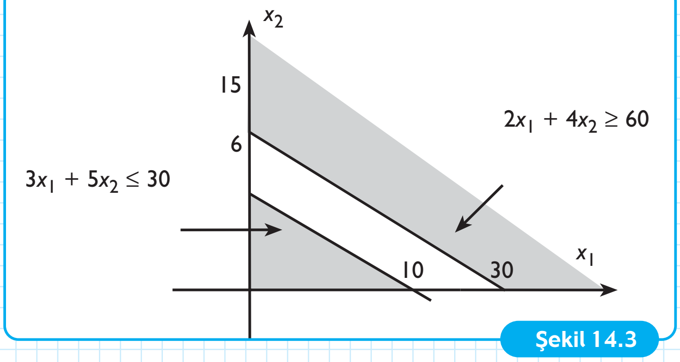
Bazı problemlerde değişkenler arasında kurulan ilişkinin belirli bir değerden büyük veya eşit şeklinde bir eşitsizlik biçiminde olabileceği önceki kesimde açıklanmıştı. Bu şekilde bir eşitsizliğin bulunduğu durumda çözümün ne şekilde yapılacağı aşağıda verilen bir örnek üzerinde açıklanacaktır.

ÖRNEK 5

$3x_1 + 5x_2 \leq 30$
$2x_1 + 4x_2 \geq 60$
$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$

sistemini grafik üzerinde gösterip, uygun çözüm alanını belirleyiniz.

ÇÖZÜM



Şekil 14.3

Eğer, değişkenler arasındaki ilişkileri gösteren denklemlerin gösterdiği doğrular kesişmiyorsa, uygun çözüm alanı yoktur.

Şekilde sistemdeki iki eşitsizliğin çözüm alanları taralı olarak gösterilmiştir. Görüldüğü gibi sistemdeki eşitsizliklerin ikisini de sağlayan ortak bir çözüm alanı yoktur.

Önceki kesimlerde doğrusal programlama modelinde verilen kısıtlayıcılar altında maksimum veya minimum yapılacak bir fonksiyona **amaç fonksiyonu** denildiğini biliyorsunuz.

Aşağıdaki problemlerde kısıtlayıcılarla birlikte amaç fonksiyonunun da verildiği bir doğrusal programlama modelinin grafik yöntemle nasıl çözüleceği açıklanacaktır.

Doğrusal Programlama Modelinin Grafik Çözümü

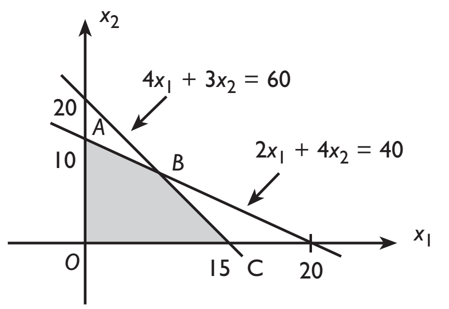
Grafik yöntemle doğrusal programlama modelinin çözümünde önce verilen eşitsizliklerin koordinat sisteminde grafikleri çizilerek uygun çözüm alanı bulunur. Optimum çözümün bulunması için uygun çözüm alanını gösteren çokgenin, bir konveks çokgen olması gerekir. Bulunan uygun çözüm alanını gösteren çokgenin köşelerinin koordinatları bu köşelerden geçen doğruların denklemlerinin ortak çözümü ile bulunur. Bulunan köşelerin koordinatları amaç fonksiyonunda yerlerine koyulur. Problem minimum yapma problemi ise amaç fonksiyonunun alacağı en küçük değerin, maksimum yapma problemi ise amaç fonksiyonunun alacağı en büyük değerin bulunduğu noktanın koordinatları optimum çözümü verecektir.

Optimum çözüm bulunabilmesi için çözüm alanını gösteren sınırlı bölgenin, konveks çokgen şeklinde olması gerekir.

ÖRNEK 6

$2x_1 + 4x_2 \leq 40$
$4x_1 + 3x_2 \leq 60$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
Amaç fonksiyonu $Z_{mak} = 20x_1 + 15x_2$

ÇÖZÜM



Şekil 14.4

Şekil 14.4 de görüldüğü gibi uygun çözüm alanı $AOBC$ dörtgenidir.
Dörtgenin B köşesinin koordinatları,

$2x_1 + 4x_2 = 40$
$4x_1 + 3x_2 = 60$

denklem sisteminin ortak çözümünden $(12 , 4) = (x_1 , x_2)$ bulunur.
Dörtgenin köşelerinin koordinatlarıyla, amaç fonksiyonunun bu noktalarda aldığı değerler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Nokta	(x_1 , x_2)	$Z = 20x_1 + 15x_2$
A	(0 , 10)	$Z = 20.0 + 15.10 = 150$
B	(12 , 4)	$Z = 20.12 + 15.4 = 300$
C	(15 , 0)	$Z = 20.15 + 15.0 = 300$

Tabloda görüldüğü gibi, amaç fonksiyonu en büyük değerini B noktasında almaktadır. O halde $x_1 = 12$, $x_2 = 4$ olduğunda amaç fonksiyonunun maksimum olma koşulu sağlanmaktadır.

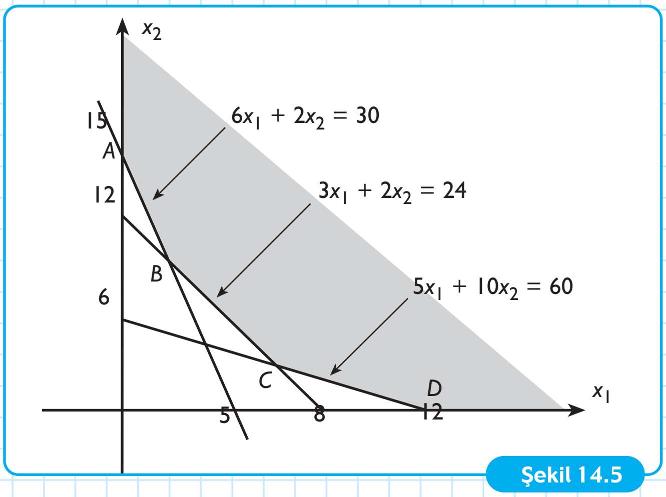
ÖRNEK 7

$6x_1 + 2x_2 \geq 30$
$3x_1 + 2x_2 \geq 24$
$5x_1 + 10x_2 \geq 60$
$x_1 \, , \, x_2 \geq 0$
$Z_{min} = 30x_1 + 50x_2$

Yukarıda verilen doğrusal programlama probleminin uygun çözüm alanını belirleyerek, optimum çözümü bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen kısıtlayıcılar ile uygun çözüm alanı, aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 14.5

Şekil 14.5 de görüldüğü gibi optimum çözüm A , B , C ve D noktalarının birisinde olacaktır.
B noktasının koordinatları,

$6x_1 + 2x_2 = 30$
$3x_1 + 2x_2 = 24$

denklemlerinin ortak çözümüyle (2, 9) olarak bulunur. C noktasının koordinatları,

$5x_1 + 10x_2 = 60$
$3x_1 + \;\; 2x_2 = 24$

denklemlerinin ortak çözümüyle (6 , 3) olarak bulunur.
Aşağıdaki tabloda A , B , C , D noktalarında amaç fonksiyonunun alacağı değerler verilmiştir.

Nokta	$(x_1 \, , \, x_2)$	$Z = 30x_1 + 50x_2$
A	(0 , 15)	$Z = 30.0 + 15.50 = 750$
B	(2 , 9)	$Z = 30.2 + 9.50 = 510$
C	(6 , 3)	$Z = 30.6 + 3.50 = 330$
D	(12 , 0)	$Z = 30.12 + 0.50 = 360$

Tabloda görüldüğü gibi, amaç fonksiyonu en küçük değerini C noktasında almakta ve dolayısıyla optimum çözüm $x_1 = 6$, $x_2 = 3$ tür.

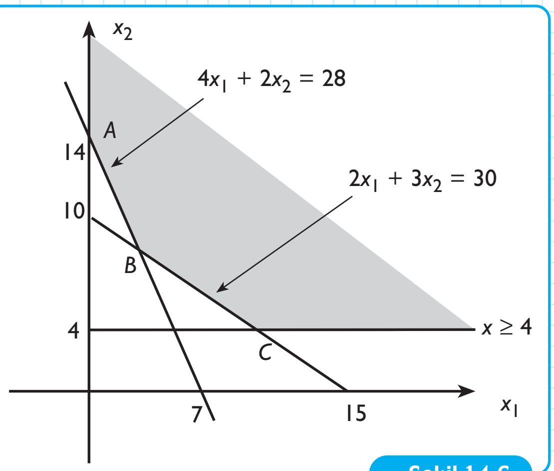
ÖRNEK 8

$4x_1 + 2x_2 \geq 28$
$2x_1 + 3x_2 \geq 30$
$x_2 \geq 4$
$x_1 \, , \, x_2 \geq 0$
$Z_{min} = 4x_1 + 5x_2$

doğrusal programlama modelinin uygun çözüm alanını bularak, optimum çözümü bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen kısıtlayıcıların grafikleri ile uygun çözüm alanı, taralı olarak aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 14.6

Şekil 14.6 da görüldüğü gibi amaç fonksiyonunu minimum yapacak değerler A , B , C noktalarından birinin koordinatları olacaktır. B noktasının koordinatları,

$4x_1 + 2x_2 = 28$
$2x_1 + 3x_2 = 30$

denklemlerinin ortak çözümüyle $(3 \, , \, 8)$ olarak bulunur. C noktasının koordinatları,

$2x_1 + 3x_2 = 30$
$x_2 = 4$

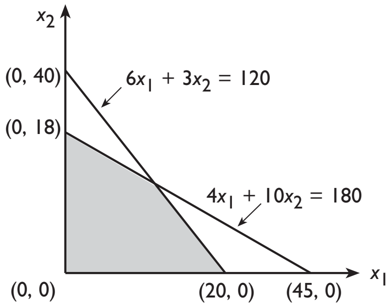
denklemlerinin ortak çözümüyle $(9 \, , \, 4)$ olarak bulunur.
A , B , C noktalarında amaç fonksiyonunun aldığı değerler, aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Nokta	$(x_1 \, , \, x_2)$	$Z = 4x_1 + 5x_2$
A	$(0 \, , \, 14)$	$Z = 4.0 + 5.14 = 70$
B	$(3 \, , \, 8)$	$Z = 4.3 + 5.8 = 52$
C	$(9 \, , \, 4)$	$Z = 9.4 + 4.5 = 56$

O halde amaç fonksiyonunu minimum yapan çözüm $x_1 = 3$, $x_2 = 8$ olmaktadır.

Kendimizi Sınayalım

1. Bir üretici her biri iki ayrı tezgahta işlenmesi gereken bisikletler ve motorsiklet gövdeleri üretmektedir. Birinci tezgahın kapasitesi 120, ikinci tezgahın kapasitesi 180 saattir. Bisiklet üretimi 6 saat 1. tezgahta, 4 saat 2. tezgahta işlenerek, motorsiklet gövdesi üretimi 3 saat 1. tezgahta, 10 saat 2. tezgahta işlenerek gerçekleştirilmektedir. Bisikletten elde edilen kâr 45 birim, motor gövdesinden elde edilen kâr 55 birim ise,işletmenin kârının maksimum değeri nedir?



Model:

$Z_{max} = 45x_1 + 55x_2$

Kısıtlar:

$6x_1 + 3x_2 \leq 120$

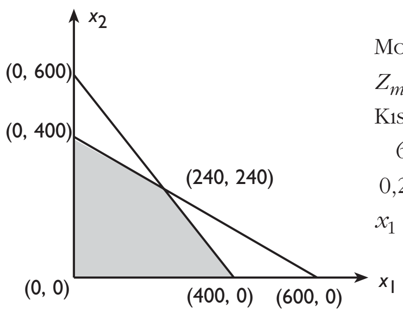
$4x_1 + 10x_2 \leq 180$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Şekil 14.7

a. 900
b. 990
c. 1306,25
d. 1650
e. 2700

2. Bir üretici elektrikli el testereleri ve matkaplar üretmektedir. Testerenin maliyeti 6 birim, matkabın ise 4 birimdir. Taşıma maliyeti testere için 0,20 birim, matkap için 0,30 birim. dir. Testere 9 birimden matkap ise 5,5 birimden satılabilmektedir. İşletmenin üretim maliyetleri için ayırdığı bütçe 2400 taşıma maliyetleri için ayırdığı bütçe 120 birim olduğuna göre, işletme kârını maksimum yapmak için her bir üründen ne kadar üretmelidir?



Model:

$Z_{max} = 9x_1 + 5{,}5x_2$

Kısıtlar:

$6x_1 + 4x_2 \leq 2400$

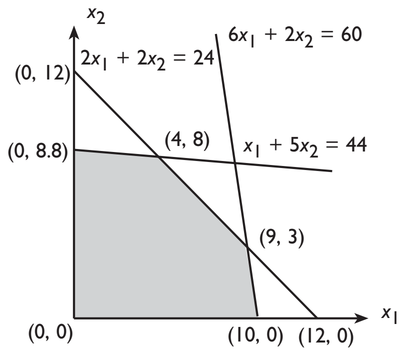
$0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \leq 120$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Şekil 14.8

a. (0,400)
b. (240,240)
c. (600,0)
d. (0,600)
e. (400,0)

3. Bir üretici elindeki üç ayrı tezgâhı kullanarak iki farklı ürün üretmektedir. Bir birim (*I*) üretmek için *A* tezgâhında 2, *B* tezgâhında 1, *C* tezgâhında 6, bir birim (*II*) üretmek için *A* tezgâhında 2, *B* tezgâhında 5, *C* tezgâhında 2 saat işlem görmektedir. Planlama döneminde tezgâh kapasiteleri sırasıyla 24, 44 ve 60 saattir. Parça başına *I* ürününden 6, *II* ürününden 9 birim kâr edilmektedir. İşletmenin maksimum kârı ne olur?



Model:

$Z_{max} = 6x_1 + 9x_2$

Kısıtlar:

$2x_1 + 2x_2 \leq 24$

$x_1 + 5x_2 \leq 44$

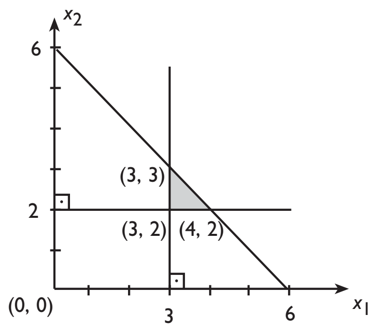
$6x_1 + 2x_2 \leq 60$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Şekil 14.9

a. 60
b. 81
c. 72
d. 96
e. 79,2

4. İki tür mal üretmekte olan bir firma haftalık talebi karşılayacak üretim programı yapmak istemektedir. Yapılan araştırmaya göre toplam talebin 6 birim olduğu anlaşılmıştır. Yönetim, birinci maldan haftada en az 3 birim, ikinci maldan en az 2 birim üretmek istemektedir. Malların birim maliyetleri sırasıyla 4 ve 5 birim olduğuna göre üretim maliyetini minimum yapacak haftalık üretim programını bulunuz.



Model:

$Z_{min} = 4x_1 + 5x_2$

Kısıtlar:

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 3$

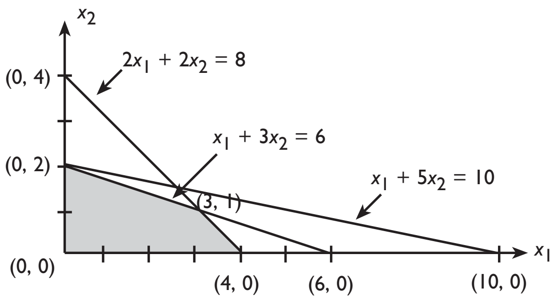
$x_2 \geq 2$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Şekil 14.10

a. (3,2)
b. (4,2)
c. (6,0)
d. (3,5)
e. (7,2)

5. Bir işletme 2 tür ürün üretmektedir. Ürünlerin birim satışında elde edilen kârlar sırasıyla 2 TL ve 1 TL . dir. Birinci maldan 1 br üretmek için 1 br malzeme, 1 saat makine ve 2 saat emek, ikinci maldan 1 bir ürütmek için 5 br malzeme, 3 saat makine ve 2 saat emek kullanılmaktadır. İşletmenin elinde 10 br malzeme, 6 saatlik makine kapasitesi ve 8 saatlik emek bulunduğuna göre, işletmenin kârını maksimum yapacak üretim programı ne olmalıdır?



Şekil 14.11

Model:

$Z_{max} = 2x_1 + x_2$

Kısıtlar:

$x_1 + 5x_2 \leq 10$

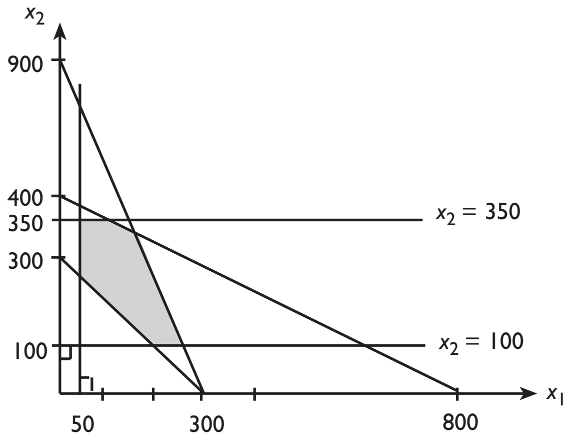
$x_1 + 3x_2 \leq 6$

$2x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1 , x_2 \geq 0$

a. (10,0)
b. (0,2)
c. (4,0)
d. (6,0)
e. (3,1)

6. Aşağıda verilen modelin optimum çözümünü araştırınız.



Şekil 14.12

Model:

$Z_{max} = 2x_1 + 6x_2$

Kısıtlar:

$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$

$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$

$x_2 \leq 350$

$x_1 \geq 50$

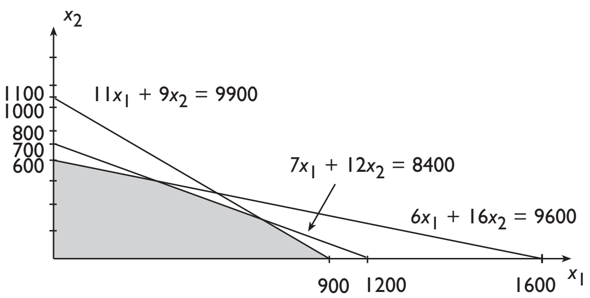
$x_2 \geq 100$

$x_1 + x_2 \geq 300$

$x_1 , x_2 \geq 0$

a. 1000
b. 1600
c. 2200
d. 2300
e. 3000

7. Bir işletmenin ürettiği P_1 ve P_2 ürünleri M_1, M_2 ve M_3 makinelerinde işlenmektedir. P_1 ürünü M_1 'de 11, M_2 'de 7 ve M_3 'de 6 dakika, P_2 ürünü ise M_1 'de 9, M_2 'de 12, M_3 'de 16 dakika işlem zamanı gerektirmektedir. M_1, M_2 ve M_3 makinelerinin planlama, dönemindeki kapasiteleri sırasıyla 165, 140 ve 160 saattir. P_1 'den birim başına 900, P_2 'den ise 1000 TL. kâr edildiğine göre, işletmenin maksimum kârı ne olur?



Şekil 14.13

Model:

$Z_{max} = 900x_1 + 1000x_2$

Kısıtlar:

$11x_1 + 9x_2 \leq 9900$

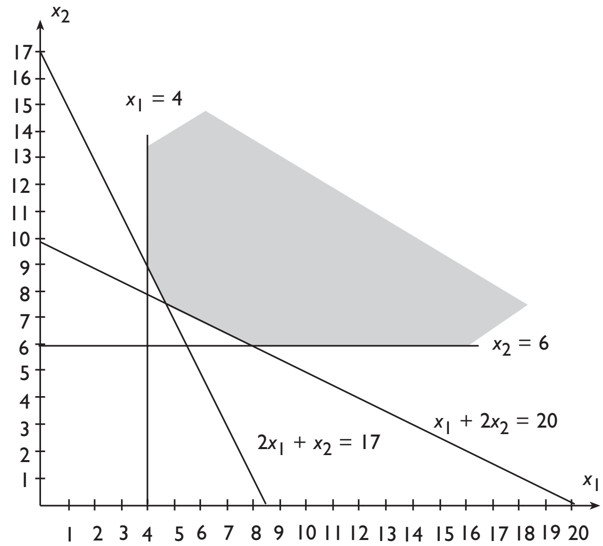
$7x_1 + 12x_2 \leq 8400$

$6x_1 + 16x_2 \leq 9600$

$x_1 \ , \ x_2 \geq 0$

a. 600000
b. 810000
c. 852000
d. 898261
e. 1080000

8. Bir çiftlikte yaşayan hayvanların beslenmesinde kullanılan iki farklı tür yem bulunmaktadır. *M* yemi kg başına 0.1 kg *A*, 0.1 kg *C*, 0.2 kg *D*, *N* yemi 0.1 kg *B*, 0.2 kg *C*, 0.1 kg *D* içermektedir. Her bir hayvanın günlük 0.4 kg *A*, 0.6 kg *B*, 2 kg C ve 1.7 kg *D* ihtiyacı vardır. 1 kg *M* 10 TL, 1 kg *N* 4 TL. olduğuna göre hayvanların besin ihtiyacını karşılayacak ve maliyeti minimum yapacak besleme programını bulunuz.



Şekil 14.14

Model:

$Z_{min} = 10x_1 + 4x_2$

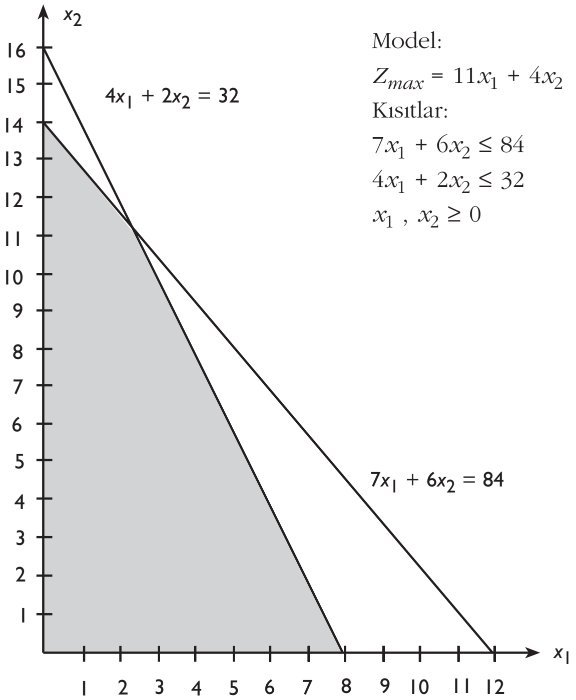
Kısıtlar:

$0{,}1x_1 \geq 0{,}4$	$x_1 \geq 4$
$0{,}1x_2 \geq 0{,}6$	$x_2 \geq 6$
$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \geq 2$	$x_1 + 2x_2 \geq 20$
$0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \geq 1{,}7$	$2x_1 + x_2 \geq 17$

$x_1 \ , \ x_2 \geq 0$

a. (0, 17)
b. (4, 9)
c. (4.6, 7.67)
d. (8, 6)
e. (20, 0)

9. Aşağıda verilen modelin uygun çözümü aşağıdakilerden hangisidir?



Model:

$Z_{max} = 11x_1 + 4x_2$

Kısıtlar:

$7x_1 + 6x_2 \leq 84$

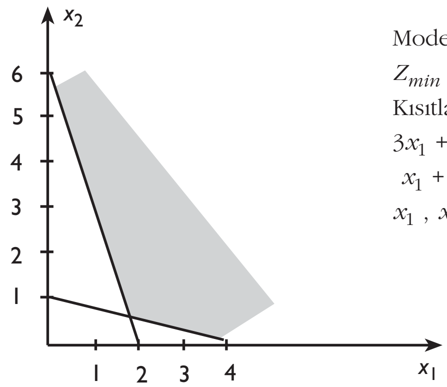
$4x_1 + 2x_2 \leq 32$

$x_1 \, , \, x_2 \geq 0$

Şekil 14.15

a. (0, 14)
b. (2.4, 11.2)
c. (8, 0)
d. (12, 0)
e. (16, 0)

10. Aşağıda verilen modelin uygun çözümünü araştırınız.



Model:

$Z_{min} = 4x_1 - x_2$

Kısıtlar:

$3x_1 + x_2 \geq 6$

$x_1 + 4x_2 \geq 4$

$x_1 \, , \, x_2 \geq 0$

Şekil 14.16

a. 1
b. $\frac{74}{11}$
c. 16
d. 0
e. -6